

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020

ćwiczenia 5.

25 lub 26 marca 2020

1. Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
2. Udowodnij, korzystając z definicji, że $f(x) = x^2$ jest funkcją wypukłą.
3. Zbadaj na jakich przedziałach następujące funkcje są wypukłe i wklęsłe:
 - a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 5$,
 - b) $g(x) = \ln x$,
 - c) $h(x) = e^{-x^2}$,
 - d) $k(x) = x^4 - 4x^3 - 90x^2 + 12x + 7$,
 - e) $l(x) = x\sqrt[3]{x-1}$,
 - f) $t(x) = -e^{-\frac{1}{x}}$,
 - g) $v(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
 - h) $w(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$,
 - i) $y(x) = x|x|$,
 - j) $z(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
4. Oblicz wszystkie pochodne funkcji $f(x) = 2^{2x}$. Odpowiedź udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej.
5. Zbadaj na jakich przedziałach funkcja

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x + 2}{x}$$

jest wypukła lub wklęsła. Znajdź punkty przegięcia.

6. Wyznacz asymptoty (poziome, pionowe, ukośne) funkcji:

- a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$,
- b) $g(x) = 2^x + 3$,
- c) $h(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$.

7. Niech funkcja f będzie zadana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x}{x+5} & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \setminus \{-5\} \\ \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

- a) Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- b) Zbadaj ciągłość funkcji f . Czy f jest ciągła w punkcie 0? Odpowiedź uzasadnij.
- c) Policz pochodne funkcji f' na przedziałach $(-\infty, 0) \setminus \{-5\}$ oraz $(0, \infty)$. Czy f jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$?
- d) Znajdź asymptoty pionowe, poziome i ukośne funkcji f .
- e) Dla $x < 0$, znajdź lokalne ekstrema oraz przedziały monotoniczności tej funkcji.
- f) Oblicz równanie prostej stycznej do wykresu f w punkcie $x = -1$.