

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020
ćwiczenia 3. – rozwiązania

4 lub 5 marca 2020

1. Z definicji pochodnej sprawdź, że funkcja $f(x) = x^2$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ oraz $f'(x) = 2x$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

2. Z definicji pochodnej sprawdź, że funkcja f chociaż jest ciągła w punkcie 0, to nie jest w nim różniczkowalna, dla:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = \infty$$

Granica jest nieskończona, więc pochodna nie istnieje.

b) $f(x) = |x|$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1.$$

zatem ta granica nie istnieje, czyli pochodna też nie.

3. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce pochodnych oraz pochodnych funkcji elementarnych, oblicz pochodne funkcji:

a) $a(x) = x - \frac{1}{x}$,

$$a'(x) = 1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

b) $b(x) = x \sin x$,

$$b'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

c) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{x} + \sqrt{5}x - 7$,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - (-1) \frac{2}{x^2} + \sqrt{5} - 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + \sqrt{5}$$

d) $g(x) = \frac{x^5}{x^2 - 3}$,

$$g'(x) = \frac{5x^4(x^2 - 3) - x^5 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{3x^6 - 3x^4}{x^4 - 6x^2 + 9}$$

e) $h(x) = x9^x$.

$$h'(x) = 1 \cdot 9^x + x9^x \ln 9 = 9^x(1 + x \ln 9).$$

4. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej, oblicz pochodne funkcji:

a) $a(x) = \sin 10x$,

$$a'(x) = 10 \cos 10x$$

b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$,

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$$

c) $g(x) = \cos^3 5x$,

$$g'(x) = (\cos 5x)' 3 \cos^2 5x = -5 \sin 5x \cdot 3 \cos^2 5x = -15 \sin 5x \cos^2 5x$$

d) $h(x) = \sqrt{\ln x}$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

5. Znajdź przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne następujących funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$,

Mamy: $f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2)+x^3 \cdot 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)x^2}{(1-x^2)^2}$. A zatem ta pochodna się zeruje dla $x = -\sqrt{3}, 0$ oraz $\sqrt{3}$ i to są kandydaci na ekstrema. Poza tym $-1, 1$ są poza dziedziną (to asymptoty pionowe funkcji f). Mamy:

- dla $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $f'(x) < 0$, a zatem f maleje,
- dla $x \in (-\sqrt{3}, -1)$, $f'(x) > 0$, a zatem f rośnie,
- dla $x \in (-1, 0)$, $f'(x) > 0$, a zatem f rośnie,
- dla $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, a zatem f rośnie,
- dla $x \in (1, \sqrt{3})$, $f'(x) > 0$, a zatem f rośnie,
- dla $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, $f'(x) < 0$, a zatem f maleje.

Czyli $-\sqrt{3}$ to lokalne minimum, a $\sqrt{3}$ to lokalne maksimum. W 0 funkcja nie ma ekstremum.

b) $g(x) = 2x^2 + |x|$.

Pochodna funkcji nie istnieje dla $x = 0$. Dla $x > 0$ mamy $f'(x) = 2x + 1 > 0$, czyli funkcja rośnie. Dla $x < 0$ mamy $f'(x) = 2x - 1 < 0$, czyli funkcja maleje. Funkcja jest ciągła, a zatem w punkcie 0 ma minimum.