

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 9. – z dystansu

24 marca 2020

1. Wyznaczyć wszystkie liczby $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ takie, że dla każdego $x \in U(\mathbb{Z}_m)$, $x^2 = 1$.
2. Udowodnić, że żadna para grup $U(\mathbb{Z}), U(\mathbb{Q}), U(\mathbb{R}), U(\mathbb{C})$ nie jest izomorficzna.
3. Jaki jest maksymalny rząd elementu w grupie Σ_{10} .
4. Udowodnić, że grupa Σ_8 zawiera cykliczną podgrupę rzędu 15. Udowodnić, że każda taka podgrupa jest zawarta w A_8 .
5. W grupie $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ wskaż podgrupy rzędu 2, 3 oraz 4. Czy grupa ta zawiera podgrupy rzędu 5, 6 lub 7.
6. Udowodnij, że każda podgrupa o indeksie 2 jest normalna.
7. Wyznaczyć wszystkie podgrupy D_4 , które nie są podgrupami normalnymi.
8. Ile jest różnych homomorfizmów z $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ w Σ_3 ? A z Σ_3 w $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$?
9. Niech $G_n = \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Niech $G = \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}} G_n$ oraz $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}} G_n$. Jakiej mocy są grupy G i H ? Czy grupy te są torsyjne?
10. Wskaż izomorfizm $\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8$.
11. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile jest nieizomorficznych abelowych grup rzędu p^2 , p^3 oraz p^4 ?
12. Udowodnij, że dla każdego grupy G , $[G, G] \trianglelefteq G$.
13. Niech G będzie grupą. Udowodnij, że relacja sprzężenia na G , $x\sigma y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in G$, że $y = gxg^{-1}$ jest relacją równoważności.
14. Udowodnij, że $Z(G) = \{x \in G : |C_x| = 1\}$.
15. Udowodnij, że $|C_x| = [G : Z(\{x\})]$.