

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 9. – z dystansu – rozwiązania

24 marca 2020

1. Wyznaczyć wszystkie liczby $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ takie, że dla każdego $x \in U(\mathbb{Z}_m)$, $x^2 = 1$.

Do $U(\mathbb{Z}_m)$ należą wszystkie liczby względnie pierwsze z m i wiemy, że mają one spełniać warunek $m \mid x^2 - 1$. Zatem jeśli $p \mid m$, to $p \mid x^2 - 1$ dla x względnie pierwszych z m . Niech $m = p^k n$, gdzie n jest względnie pierwsze z p , oraz niech $ap + bn = 1$. Jeśli $p > 3$, to skoro $2ap + 2bn = 2$, to właśnie taką ma resztę z dzielenia przez p i jest to liczba względnie pierwsza z m , ale $(2ap + 2bn)^2 - 1$ w takim razie daje resztę $3 \neq 0$ z dzielenia przez p . Zatem jedynymi dzielnikami m mogą być 2 oraz 3. Analogicznie można dowieść, że m nie dzieli się przez 9 ani przez 16. Stąd $m \in \{2, 4, 8, 6, 12, 24\}$.

2. Udowodnić, że żadna para grup $U(\mathbb{Z}), U(\mathbb{Q}), U(\mathbb{R}), U(\mathbb{C})$ nie jest izomorficzna.

$U(\mathbb{Z}) = \{1\}$, $U(\mathbb{Q})$ jest przeliczalna, pozostałe dwie grupy są nieprzeliczalne, więc jedyna szansa jest taka, że dwie ostatnie są izomorficzne. Ale w $U(\mathbb{C})$ istnieje element różny od 1 o tej własności, że $x^3 = 1$ (jest nim $-i$), a w $U(\mathbb{R})$ taki element nie istnieje.

3. Jaki jest maksymalny rząd elementu w grupie Σ_{10} .

Szukamy takiego rozkładu $10 = x_1 + \dots + x_k$ (permutacji na rozłączne cykle), że $\text{nww}(x_1, \dots, x_k)$ jest możliwie duży. Taki rozkład to $2 + 3 + 5$ i $\text{nww}(2, 3, 5) = 30$ jest maksymalnym rzędem elementu.

4. Udowodnić, że grupa Σ_8 zawiera cykliczną podgrupę rzędu 15. Udowodnić, że każda taka podgrupa jest zawarta w A_8 .

Takim elementem jest $(1, 2, 3)(4, 5, 6, 7, 8)$. Więc $\langle (1, 2, 3)(4, 5, 6, 7, 8) \rangle$ jest taką podgrupą. Co więcej każda taka podgrupa jest generowana przez permutację rzędu 15, czyli złożoną z cykli o długości będących dzielnikami 15, a więc w szczególności nieparzystej długości. Każdy cykl nieparzystej długości jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, więc jest to permutacja parzysta.

5. W grupie $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ wskaż podgrupy rzędu 2, 3 oraz 4. Czy grupa ta zawiera podgrupy rzędu 5, 6 lub 7.

Zauważmy, że $|GL(2, \mathbb{Z}_3)| = 8 \cdot 6$. Zatem na pewno nie zawiera podgrup rzędu 5 i 7. Zauważamy, że $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ są elementami rzędu 2, więc każdy z nich generuje grupę rzędu dwa, a razem grupę rzędu

4. Element $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ jest rzędu trzy, więc generuje podgrupę takiego rzędu, a razem z jednym z dwóch poprzednich, generuje podgrupę rzędu 6.

6. Udowodnij, że każda podgrupa o indeksie 2 jest normalna.

Niech $H \leq G$ oraz $[G : H] = 2$, czyli mamy tylko dwie warstwy. Wtedy, jeśli $h \in H$ oraz $g \in G$. Jeśli $g \in H$, to oczywiście $ghg^{-1} \in H$. Zatem niech $g \in G \setminus H$ oraz założmy, że $ghg^{-1} \notin H$, zatem ghg^{-1} należy do jedynej innej warstwy, czyli $ghg^{-1} \in gH$, czyli istnieje $h' \in H$, że $ghg^{-1} = gh'$, zatem $hg^{-1} = h'$, więc $g = h'^{-1}h \in H$, co stanowi sprzeczność.

7. Wyznaczyć wszystkie podgrupy D_4 , które nie są podgrupami normalnymi.

W D_4 mamy osiem elementów, zatem poza trywialnymi (a więc też zatem normalnymi) mogą być podgrupy rzędu 2 i 4, czyli odpowiednio indeksu 4 i 2. W tym drugim przypadku są one normalne na mocy poprzedniego zadania, zatem interesują nas tylko podgrupy rzędu 2. Zatem taka grupa $H = \{\text{id}, h\}$. Jeśli jest normalna, to dla każdego g mamy $\{g, gh\} = \{g, hg\}$, zatem h jest w centrum. Zatem wystarczy rozważyć h , które nie są w centrum, a są to w takim razie wszystkie cztery symetrie osiowe.

8. Ile jest różnych homomorfizmów z $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ w Σ_3 ? A z Σ_3 w $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$?

Z $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ w Σ_3 nie może być „mono”, więc jeśli ten homomorfizm nie jest trywialny, musi $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ przeprowadzać na jedną z trzech podgrup w Σ_3 generowanych przez symetrie osiowe. Zatem jądro jest rzędu 2 i wybór jedyne elementu w jądrze poza $(0,0)$ definiuje taki homomorfizm – a kandydatów za każdym razem jest trzech. Zatem nietrywialnych homomorfizmów jest 9 i jeden zerowy.

Z Σ_3 w $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$? też nie może być mono – jeśli jest nietrywialny, to przeprowadza Σ_3 na jedną z trzech podgrup rzędu 2. Zatem jądro jest rzędu 3 – jest jedną z dwóch podgrup takiego rzędu w Σ_3 ($\langle \rho \rangle$ lub $\langle \varepsilon \rho \rangle$), co już definiuje cały homomorfizm, zatem jest ich 6 plus jeden zerowy.

9. Niech $G_n = \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Niech $G = \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}} G_n$ oraz $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}} G_n$. Jakiej mocy są grupy G i H ? Czy grupy te są torsyjne?

Moce odpowiednio przeliczalna i mocy continuum. Rząd $(1, \dots)$ jest nieskończony, więc G nie jest torsyjna. Za to H jest, bo rząd każdego elementu jest ograniczony przez iloczyn (skończonej) liczby miejsc, na których nie ma zera.

10. Wskaż izomorfizm $\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8$.

Zauważamy, że $\mathbb{Z}_3 \simeq \langle 8 \rangle$ oraz $\mathbb{Z}_8 \simeq \langle 3 \rangle$. Zatem $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8$, z $\varphi(x) = (a, b)$, gdzie a i b są resztami z dzielenia odpowiednio przez 3 i 8 jest izomorfizmem – rzeczywiście $\langle 3, 8 \rangle = \mathbb{Z}_{24}$ oraz $\langle 3 \rangle \cap \langle 8 \rangle = \{0\}$.

11. Niech p będzie liczbą pierwszą. Ile jest nieizomorficznych abelowych grup rzędu p^2 , p^3 oraz p^4 ?

Mamy dwie grupy rzędu p^2 , bo $p^2 = p \cdot p$ oraz trzy rzędu p^3 , bo $p^3 = p^2 \cdot p = p \cdot p \cdot p$ oraz pięć rzędu p^4 , bowiem $p^4 = p^3 \cdot p = p^2 \cdot p^2 = p^2 \cdot p \cdot p = p \cdot p \cdot p \cdot p$.

12. Udowodnij, że dla każdej grupy G , $[G, G] \trianglelefteq G$.

Zauważmy, że $[x, y]^{-1} = [y, x]$, więc jeśli $h \in [G, G]$, to $h = [x_1, y_1] \cdot \dots \cdot [x_n, y_n]$, dla pewnych $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Zatem dla $g \in G$,

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= g[x_1, y_1]g^{-1}g[x_2, y_2]g^{-1} \cdot \dots \cdot g[x_n, y_n]g^{-1} = \\ &= [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}][gx_2g^{-1}, gy_2g^{-1}] \cdot \dots \cdot [gx_ng^{-1}, gy_ng^{-1}] \in [G, G]. \end{aligned}$$

13. Niech G będzie grupą. Udowodnij, że relacja sprzężenia na G , $x\sigma y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in G$, że $y = gxg^{-1}$ jest relacją równoważności.

Owszem, $x\sigma x$, bo $x = 1x1^{-1}$. Jeśli $x\sigma y$, to $y = g^{-1}xg$, więc $x = (g^{-1})^{-1}yg^{-1}$, czyli $y\sigma x$. I w końcu, jeśli $x\sigma y$ oraz $y\sigma z$, to $z = h^{-1}yh = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-1}x(gh)$, więc $x\sigma z$.

14. Udowodnij, że $Z(G) = \{x \in G : |C_x| = 1\}$.

Rzeczywiście, jeśli $x \in G$, to dla każdego $g \in G$, $xg = gx$, czyli $g^{-1}xg = x$, zatem $C_x = \{x\}$. Z drugiej strony, jeśli $|C_x| = 1$, to $C_x = \{x\}$, czyli dla każdego $g \in G$, $g^{-1}xg = x$, czyli $gx = xg$.

15. Udowodnij, że $|C_x| = [G : Z(\{x\})]$.

Niech $H = Z(\{x\})$. Niech $y = g^{-1}xg$ dla pewnego $g \in G$. Wtedy g^{-1} należy do pewnej wyznaczonej warstwy kH . Czyli $g^{-1} = kh$, dla pewnego $h \in H$. W takim razie $y = g^{-1}xg = khx(kh)^{-1} = khxh^{-1}k^{-1} = kxhk^{-1}$. Dla dwóch elementów z tej samej warstwy H otrzymujemy więc ten sam element sprzężony, zatem $|C_x| \leq [G : Z(\{x\})]$. Za to, jeśli weźmiemy g, k należące do różnych warstw, czyli $gk^{-1} \notin H$ (i $k^{-1}g \notin H$), to oznacza, że $k^{-1}gx \neq xk^{-1}g$, zatem $gxg^{-1} \neq kxk^{-1}$, czyli te dwa elementy dają różne elementy sprzężone.