

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 8. – z dystansu – rozwiązania

20 marca 2020

1. Udowodnij, że zbiór wszystkich elementów torsyjnych w grupie abelowej jest podgrupą.
Niech G będzie grupą abelową, oraz niech T będzie zbiorem wszystkich jej elementów torsyjnych. Zatem $1 \in T$, bo $o(1) = 1$. Jeśli $a, b \in T$, to $o(a) = n < \infty$ i $o(b) = m < \infty$. Wtedy $(ab)^{nm} = a^n b^m = 1$ (skorzystaliśmy tu z abelowości grupy). Zatem $ab \in T$. Oczywiście, skoro $a \in T$ i $o(a) = n < \infty$ to $o(a^{-1}) = n < \infty$, czyli $a^{-1} \in T$ także.
2. Udowodnij, że $\{(a, a, a) \in (\mathbb{Z}_2)^3 : a \in \mathbb{Z}_2\}$ jest podgrupą.
Rzeczywiście są w tym zbiorze dwa elementy $(0, 0, 0)$ oraz $(1, 1, 1)$. Mamy też $1 = (1, 1, 1) \in H$, oraz $(0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0) \in H$, $(0, 0, 0) + (1, 1, 1) = (1, 1, 1) \in H$, $(1, 1, 1) + (1, 1, 1) = (0, 0, 0) \in H$ i w końcu $-(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \in H$, $-(1, 1, 1) = (1, 1, 1) \in H$.
3. Czy istnieje homomorfizm:
 - a) grupy $\mathbb{Z}^+$ na grupę $\mathbb{Q}^+$?
Nie, bo $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, więc gdyby taki homomorfizm φ istniał, to $\mathbb{Q} = \langle \varphi(1) \rangle$, a wiadomo, że $\mathbb{Q}$ nie jest cykliczna, a nawet skończenie generowana.
 - b) grupy $\mathbb{Z}_6^+$ na grupę $\mathbb{Z}_3^+$?
Tak $\varphi(a)$ to reszta z dzielenia a przez 3.
4. Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś G grupą abelową (będziemy stosować notację z $+$, 0 , $-a$) oraz $H_p = \{g \in G : \exists n p^n g = 0\}$.
 - a) Wykaż, że $H_p \leq G$.
 $0 \in H_p$, bo $p^0 0 = 0$. Jeśli $a, b \in H_p$, to dla pewnych n, m $p^n a = 0 = p^m b$, zatem $p^{n+m}(a+b) = p^m(p^n a) + p^n(p^m b) = 0 + 0 = 0$ (tu aktywnie korzystamy z przemienności), czyli $a+b \in H_p$. Oczywiście, skoro $p^n a = 0$, to $p^n(-a) = -p^n a = 0$, więc $-a \in H_p$.
 - b) Wykaż, że dla dowolnego automorfizmu $f: G \rightarrow G$, zachodzi $f[H_p] = H_p$.
Jeśli $a \in H_p$, to $p^n a = 0$, w takim razie $0 = f(0) = f(p^n a) = p^n f(a)$, więc $f(a) \in H_p$. W drugą stronę, jeśli $a \in G$ oraz $f(a) \in H_p$, to mamy n , że $0 = p^n f(a) = f(p^n a)$. Ale skoro f jest automorfizmem, czyli jest mono, to $p^n a = 0$, więc $a \in H_p$.
5. Rozstrzygnij, czy grupa $\mathbb{Q}^+/\mathbb{Z}^+$ jest torsyjna.
Tak. Jeśli $q + \mathbb{Z}$ jest warstwą oraz $q = a/b$, to $b \cdot (q + \mathbb{Z}) = a + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$, bowiem $a \in \mathbb{Z}$, więc $o(q + \mathbb{Z}) \leq b < \infty$.
6. Niech p będzie liczbą pierwszą. Grupę skończoną G nazywamy p -grupą, jeśli rząd grupy G jest potęgą liczby p . Udowodnij, że:
 - a) każda podgrupa p -grupy jest p -grupą,
Jasne, bo rząd podgrupy dzieli rząd grupy, a jedynymi dzielnikami p^n są liczby postaci p^k .
 - b) każdy obraz homomorficzny p -grupy jest p -grupą.
Niech $\varphi: G \rightarrow H$ będzie „na” oraz G niech będzie p -grupą. Wiemy, że $H \simeq G/\ker \varphi$ oraz, że $|G/\ker \varphi| = [G : \ker \varphi]$ jest dzielnikiem $|G|$.
7. Skonstruować dwa różne ciągi normalne grupy $\mathbb{Z}_{24}^+$ długości 3 i wyznaczyć faktory tych ciągów.
Mamy $\{0\} \trianglelefteq 4\mathbb{Z}_{24} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}_{24} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{24}$ i faktory $4\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_6$, $4\mathbb{Z}_{24}/2\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_2$ oraz $\mathbb{Z}_{24}/2\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_2$.
Również $\{0\} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{24} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}_{24} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{24}$ i faktory $6\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_4$, $6\mathbb{Z}_{24}/3\mathbb{Z}_{24} \simeq \mathbb{Z}_2$ oraz $\mathbb{Z}_{24}/3\mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_3$.

8. Udowodnij, że grupa A_n jest generowana przez wszystkie cykle długości 3.

Wystarczy zauważyć, że każdy cykl o długości nieparzystej da się przedstawić jako złożenie cykli długości 3:

$$(i_1, \dots, i_{2k+1}) = (i_1, i_{2k}, i_{2k+1}) \circ (i_1, i_{2k-2}, i_{2k-1}) \circ \dots \circ (i_1, i_4, i_5) \circ (i_1, i_2, i_3)$$

oraz każda para dwóch rozłącznych cykli długości parzystej także:

$$(i_1, \dots, i_{2k})(j_1, \dots, j_{2k}) = (j_{2k}, j_1, i_{2k}) \circ (i_1, j_1, i_{2k}) \circ (j_1, j_{2k-2}, j_{2k-1}) \circ \dots \circ (j_1, j_2, j_3) \circ (i_1, i_{2k-2}, i_{2k-1}) \circ \dots \circ (i_1, i_2, i_2).$$

9. Niech $G = \langle (1, 2, 3), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rangle \leq \Sigma_9$. Wykaż, że $G \neq \Sigma_9$.

$(1, 2, 3)$ oraz $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ to permutacje parzyste, więc nie da się z nich wygenerować permutacji nieparzystej, np. $(1, 2) \notin G$.

10. Opisz centrum $Z(D_{10})$ grupy izometrii dziesięciokąta foremnego.

Mamy $D_{10} = \{\text{id}, \varepsilon, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \varepsilon\rho, \varepsilon\rho^2, \dots, \varepsilon\rho^{n-1}\}$, gdzie ρ to obrót o $2\pi/n$, a ε to symetria względem jednej ustalonej osi. Zauważmy, że $\varepsilon^2 = \text{id}$, $\rho^n = \text{id}$, $\varepsilon\rho\varepsilon = \rho^{-1}$.

Oczywiście $\text{id} \in Z(D_{10})$. Ale też $\varepsilon\rho^i = \rho^{-i}\varepsilon \neq \rho\varepsilon$, o ile $i \neq 5$. W takim przypadku $\rho^5\varepsilon\rho^i = \varepsilon\rho^6$, więc ρ^5 jest w centrum.

Mamy też $\rho\varepsilon\rho^i = \varepsilon\rho^{-1}\rho^i = \varepsilon\rho^{i-1} \neq \varepsilon\rho^{i+1}$. Więc $Z(D_{10}) = \{\text{id}, \rho^5\}$.

11. Udowodnić, że każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji elementów sąsiednich.

Patrzmy na transpozycję (i, j) , $i < j$. I indukcja względem $j-i$. Jeśli $j-i = 1$, to już. W kroku indukcyjnym założmy, że umiemy tak zapisać transpozycję $(i, j-1)$. Wtedy $(i, j) = (i, j-1) \cdot (j-1, j) \cdot (i, j-1)$ też jest w takim razie takim złożeniem.

12. Następujące permutacje przedstawić jako złożenie transpozycji:

- a) $(1, 3, 4, 2)$,
 $(1, 3, 4, 2) = (1, 2) \circ (1, 4) \circ (1, 3)$.
 b) $(1, 3, 2, 4)$.
 $(1, 3, 2, 4) = (1, 4) \circ (1, 2) \circ (1, 3)$.

13. Niech G będzie grupą abelową oraz $H = \{g \in G: \exists m m \cdot g = 0\}$ oraz $H_p = \{g \in G: \exists n p^n g = 0\}$. Udowodnij, że $H = \bigoplus_{p \in P} H_p$, gdzie P to zbiór liczb pierwszych.

Przypomnijmy sobie, że mówimy, że grupa H jest sumą prostą swoich podgrup H_i , jeśli:

- $H_i \cap H_j = \{0\}$, dla $i \neq j$,
- $H_i \trianglelefteq H$,
- te podgrupy generują H .

Sprawdźmy te warunki w przypadku grupy H i jej podgrup H_p , $p \in P$.

- $H_p \cap H_q = \{0\}$, dla $p \neq q$, bowiem rzeczywiście, jeśli $g \in H_p \cap H_q$, to istnieją n, m , że $p^n g = q^m g = 0$, zatem $o(g) | p^n$, $o(g) | q^m$, ale skoro p, q są względnie pierwsze, to $o(g) = 1$, czyli $g = 0$.
- $H_p \trianglelefteq H$, bo w grupie abelowej każda podgrupa jest normalna.
- te podgrupy generują H . Sprawdzimy, że jeśli $g \in H$ oraz $o(g) = r = p^k \cdot n$, gdzie n i p są względnie pierwsze, to $g = ag_0 + bg_1$, gdzie $g_0 \in H_p$ oraz $o(g_1) = n$. Rzeczywiście, jeśli zastosujemy ten fakt indukcyjnie po r , to dostaniemy, że jeśli $g \in H$ (zatem $o(g) = r < \infty$, $r = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$), to $g = h_1 + \dots + h_m$, gdzie $h_i \in H_{p_i}$, zatem H jest generowane przez podgrupy H_p , $p \in P$. Fakt ten natomiast zachodzi, ponieważ skoro p^k i n są względnie pierwsze, to istnieją $a, b \in \mathbb{Z}$, że $an + bp^k = 1$, zatem $g = an \cdot g + bp^k \cdot g$, zatem niech $g_0 = n \cdot g \in H_p$, ponieważ $p^k g_0 = 0$ oraz $g_1 = p^k \cdot g$ i mamy $o(g_1) = n$.

14. Niech $n > 0$, oraz G niech będzie grupą abelową. Niech $H^n = \{n \cdot g: g \in G\}$. Wykazać, że:

- a) H^n jest grupą,
 Oczywiście $0 \in H^n$. Jeśli $a, b \in H^n$, to $a = ng, b = nh$, więc $a = n(g+h)$ (korzystając z przemienności). I w końcu $-a = n(-g)$.

b) dla dowolnego automorfizmu $f: G \rightarrow G$, zachodzi $f[H^n] = H^n$.

Rzeczywiście, jeśli $a \in H^n$, czyli $a = ng$, to $f(a) = nf(g) \in H^n$. Jeśli $f(a) \in H^n$, czyli $f(a) = ng$, ale f jest „na”, więc $g = f(h)$, zatem $f(a) = nf(h) = f(nh)$, a skoro f jest mono, to $a = nh$, więc $a \in H^n$.

15. Niech $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{125} \oplus \mathbb{Z}_7$. Opisz H^2 , G/H^2 , H^{25} , G/H^{25} .

Mamy $2\mathbb{Z}_2 = \{0\}$, $2\mathbb{Z}_8 \simeq \mathbb{Z}_4$, $2\mathbb{Z}_9 = \mathbb{Z}_9$, $2\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$, $2\mathbb{Z}_{125} = \mathbb{Z}_{125}$ oraz $2\mathbb{Z}_7 = \mathbb{Z}_7$. Zatem $H_2 \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{125} \oplus \mathbb{Z}_7$ oraz $G/H^2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Podobnie $H^{25} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7$ oraz $G/H^{25} = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25}$.