

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 7. – z dystansu

17 marca 2020

1. Udowodnij, że jeśli w grupie G , dla każdego $g \in G$, $g^2 = 1$, to ta grupa jest abelowa. Co więcej, jeśli ta grupa jest skończona, to $|G| = 2^m$.
2. Udowodnij, że $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_k$ jest grupą cykliczną wtedy i tylko wtedy gdy n, k są względnie pierwsze. Ponadto wykaż, że w takim przypadku $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}_{nk}$.
3. Udowodnij Twierdzenie Cayleya, które mówi, że każda grupa jest izomorficzna G z pewną podgrupą grupy bijekcji $G \rightarrow G$ (oznaczaną Σ_G).
4. Udowodnij, że grupa $\mathbb{Q}^+$ nie jest cykliczna, a wręcz, że nie ma żadnego skończonego zbioru generatorów.
5. Przedstaw permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

jako iloczyn rozłącznych cykli.

6. Znaleźć rzędy wszystkich elementów grupy $\mathbb{Z}_{12}$.
7. Udowodnij, że jeśli $\varphi: G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $\ker \varphi \trianglelefteq G$.
8. Niech $A \subseteq G$, gdzie G jest grupą. Centralizatorem zbioru A nazywamy

$$Z(A) = \{g \in G: \forall a \in A ag = ga\}.$$

Udowodnij, że $Z(A) \leq G$.

9. Udowodnij, że jedynymi podgrupami grupy G o rzędzie pierwszym są 1 oraz G .
10. Udowodnij, że jeśli permutacja σ jest złożeniem cykli rozłącznych o długości $n_1, \dots, n_k$, to

$$o(\sigma) = \text{nww}(n_1, \dots, n_k).$$

11. Niech $\sigma = (6, 13) \circ (7, 8) \circ (2, 3, 11, 4, 12, 9) \circ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \in \Sigma_{13}$.
 - a) Zapisz σ^{-1} jako iloczyn rozłącznych cykli.
 - b) Udowodnij, że σ jest permutacją nieparzystą.
 - c) Zbadaj, czy w Σ_{13} istnieje permutacja parzysta o takim samym rzędzie, co σ .
12. Znaleźć monomorfizm $\phi: \Sigma_n \rightarrow GL(n, K)$.
13. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, grupa permutacji parzystych $A_n \trianglelefteq \Sigma_n$ oraz $\Sigma_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$.
14. Niech $H \trianglelefteq G$. Pokazać, że dla każdych $x, y \in G$, jeśli $xy \in H$, to $yx \in H$. Podać przykład takich H, G , że $H \leq G$, ale ta własność nie zachodzi.
15. Udowodnij, że jeśli G jest grupą cykliczną:
 - (a) jeśli $H \leq G$, to H jest grupą cykliczną.
 - (b) jeśli dodatkowo $|G| < \infty$, to dla każdej liczby $l \mid |G|$ istnieje dokładnie jedna podgrupa $H \leq G$ taka, że $|H| = l$.