

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 6. – z dystansu

13 marca 2020

1. Udowodnij, że w grupie jest tylko jeden element neutralny.
2. Udowodnij, że dla każdego elementu g w grupie G jest tylko jeden element h , że $gh = 1$.
3. Udowodnij, że jeśli $g \in G$ oraz $o(g) < \infty$, to $o(g) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $g^k = 1 \Leftrightarrow n|k$.
4. Napisz tabliczkę mnożenia grupy izometrii trójkąta równobocznego.
5. Udowodnij, że jeśli G, H to grupy, a $\varphi: G \rightarrow H$ to homomorfizm, oraz $g \in G$, to $o(\varphi(g)) | o(g)$.
6. Niech $g \in G$ oraz $o(g) = n$. Udowodnij, że $o(g^k) = \frac{n}{\text{nwd}(n, k)}$.
7. Udowodnij, że jeśli $H \leq G$, to każde warstwa H jest równoliczna z H .
8. Wypisz tabliczkę działania w grupie addytywnej i w grupie multiplikatywnej pierścienia $\mathbb{Z}_6$.
9. Udowodnij, że jeśli $g, h \in G$, to $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.
10. Udowodnij, że każda grupa skończona jest torsyjna.
11. Udowodnij Twierdzenie Lagrange'a, które mówi że jeśli $|G| < \infty$ oraz $H \leq G$, to $|G| = |H| \cdot [G : H]$.
12. Udowodnij, że jeśli $H \leq G$ oraz pewne dwa elementy wśród x, y, xy należą do H , to trzeci też.
13. Udowodnij, że homomorfizm $\varphi: G \rightarrow H$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \varphi = \{1\}$.
14. Udowodnij, że jeśli $\varphi: G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $|\text{im} \varphi| = [G : \ker \varphi]$.
15. Niech $g \in G$. Wtedy niech $\varphi_g: G \rightarrow G$ będzie zadane wzorem $\varphi_g(x) = g^{-1}xg$. Udowodnij, że $H \trianglelefteq G$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $g \in G$, $\varphi_g[H] \subseteq H$.