

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 6. – z dystansu – rozwiązania

13 marca 2020

1. Udowodnij, że w grupie jest tylko jeden element neutralny.

Niech $\forall g \in G \quad g \cdot 1 = g$ oraz $g \cdot e = g$. Wtedy $g1 = ge$, zatem $g^{-1}g1 = g^{-1}ge$, czyli $1 \cdot 1 = 1 \cdot e$, czyli $1 = e$.

2. Udowodnij, że dla każdego elementu g w grupie G jest tylko jeden element h , że $gh = 1$.

$xy = 1$, $xy' = 1$, czyli $xy = xy'$, czyli $x^{-1}xy = x^{-1}xy'$, czyli $y = y'$.

3. Udowodnij, że jeśli $g \in G$ oraz $o(g) < \infty$, to $o(g) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $g^k = 1 \Leftrightarrow n|k$.

$\Rightarrow$: niech k będzie takie, że $g^k = 1$ oraz niech $d = \text{nwd}(n, k)$ i $d = xn + yk$, dla $x, y \in \mathbb{Z}$. Ale wtedy $= d(g^n)^x \cdot (g^k)^y = 1$. Zatem $d \geq n$, czyli $d = n$, czyli $n|k$. Przeciwnie, jeśli $n|k$, to oczywiście $g^k = 1$.

$\Leftarrow$: Niech m będzie najmniejszą liczbą taką, że $g^m = 1$. Wtedy $n|m$, zatem $n \leq m$. Z drugiej strony $n|n$, więc $g^n = 1$, więc $m \leq n$. Zatem $n = m = o(g)$.

4. Napisz tabliczkę mnożenia grupy izometrii trójkąta równobocznego.

Trójkąt równoboczny ma następujące izometrie: identyczność i , obrót 60° w prawo o_p , obrót 60° w lewo o_l , symetria względem prostej przechodzącej przez każdy z wierzchołków s_1, s_2, s_3 (umówmy się, że wierzchołki ponumerujemy od lewego dolnego zgodnie ze wskazówkami zegara).

Dostajemy taką tabelkę:

$\downarrow \cdot \rightarrow$	i	o_p	o_l	s_1	s_2	s_3
i	i	o_p	o_l	s_1	s_2	s_3
o_p	o_p	o_l	i	s_2	s_3	s_1
o_l	o_l	i	o_p	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	i	o_l	o_p
s_2	s_2	s_1	s_3	o_p	i	o_l
s_3	s_3	s_2	s_1	o_l	o_p	i

5. Udowodnij, że jeśli G, H to grupy, a $\varphi: G \rightarrow H$ to homomorfizm, oraz $g \in G$, to $o(\varphi(g))|o(g)$.

Rzeczywiście, jeśli $g^n = 1$, to $\varphi(g^n) = (\varphi(g))^n = 1$, zatem teza wynika z zadania 3.

6. Niech $g \in G$ oraz $o(g) = n$. Udowodnij, że $o(g^k) = \frac{n}{\text{nwd}(n, k)}$.

Niech $d = \text{nwd}(n, k)$ oraz $n = dm$, $k = dl$. Zauważ, że m i l są względnie pierwsze. Mamy $(g^k)^m = g^{dlm} = g^{nl} = 1$, zatem $o(g^k)|m$, czyli $o(g^k) \leq m$. Za to jeśli $(g^k)^r = 1$, to $n|kr$, zatem $md|dlr$, czyli $m|lr$. Ale skoro m i l są względnie pierwsze, to $m|r$, czyli $m \leq r$, zatem $o(g^k) = m$.

7. Udowodnij, że jeśli $H \leq G$, to każde warstwa H jest równoliczna z H .

Oczywiście $f(h) = gh$ jest bijekcją $f: H \rightarrow gH$.

8. Wypisz tabliczkę działania w grupie addytywnej i w grupie multiplikatywnej pierścienia $\mathbb{Z}_6$.

Grupa addytywna to $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ z $+$ i elementem neutralnym 0 i tabelką:

$\downarrow + \rightarrow$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

natomiast grupa multiplikatywna $U(\mathbb{Z}_6)$ składa się tylko z elementów odwracalnych $\{1, 5\}$.

$\downarrow \cdot \rightarrow$	1	5
1	1	5
5	5	1

9. Udowodnij, że jeśli $g, h \in G$, to $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.
Owszem $ghh^{-1}g^{-1} = g1g^{-1} = gg^{-1} = 1$.
10. Udowodnij, że każda grupa skończona jest torsyjna.
Niech $g \in G$. Skoro grupa jest skończona, to dla pewnych n, m , $g^n = g^m$. Niech $m > n$. Wtedy $g^{m-n} = 1$.
11. Udowodnij Twierdzenie Lagrange'a, które mówi że jeśli $|G| < \infty$ oraz $H \leq G$, to $|G| = |H| \cdot [G : H]$.
Wynika to od razu z zadania 7.
12. Udowodnij, że jeśli $H \leq G$ oraz pewne dwa elementy wśród x, y, xy należą do H , to trzeci też.
Rzeczywiście, oczywiście, jeśli $x, y \in H$, to $xy \in H$. Jeśli $x, xy \in H$, to $x^{-1} \in H$, więc $y = x^{-1}xy \in H$ i podobnie w trzecim przypadku.
13. Udowodnij, że homomorfizm $\varphi: G \rightarrow H$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker \varphi = \{1\}$.
 $\Rightarrow$ jest jasne. $\Leftarrow$: Niech $\varphi(g) = \varphi(g')$. Wtedy $\varphi(gg'^{-1}) = \varphi(g)(\varphi(g'))^{-1} = 1$, zatem $gg'^{-1} \in \ker \varphi$. Zatem $gg'^{-1} = 1$, więc $g = g'$.
14. Udowodnij, że jeśli $\varphi: G \rightarrow H$ jest homomorfizmem, to $|\operatorname{im} \varphi| = [G : \ker \varphi]$.
 $\varphi(x) = \varphi(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^{-1}y \in \ker \varphi$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x \ker \varphi = y \ker \varphi$.
15. Niech $g \in G$. Wtedy niech $\varphi_g: G \rightarrow G$ będzie zadane wzorem $\varphi_g(x) = g^{-1}xg$. Udowodnij, że $H \trianglelefteq G$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $g \in G$, $\varphi_g[H] \subseteq H$.
 $\Rightarrow$: jasne. $\Leftarrow$: Niech $h \in H$, $g \in G$. Trzeba pokazać, że $H \subseteq gHg^{-1}$.

$$h = (gg^{-1})h(gg^{-1}) = g(g^{-1}hg)g^{-1},$$

ale $g^{-1}hg \in H$, zatem $h \in gHg^{-1}$.