

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 11. – z dystansu

31 marca 2020

Zadania

1. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x - y, x + 3y + z, 2z)$ znaleźć wartości własne i odpowiadające im bazy przestrzeni własnych.
2. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((a, b, c)) = (3a, a + 2b - c, a - b + 2c)$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}$.
3. Niech V będzie przestrzenią funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mających pochodne i -tego stopnia dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie takie, że $\varphi(f) = f'$ dla każdego $f \in V$. Wykazać, że każda liczba $a \in \mathbb{R}$ jest wartością własną φ . Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ znaleźć $V_{(a)}$.
4. Niech $w(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że
 - a) $\det A = a_0$,
 - b) $\operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} a_{n-1}$
5. Niech $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi(v_i) = v_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$ i $\varphi(v_n) = a_0 v_1 + \dots + a_{n-1} v_n$. Znaleźć wielomian charakterystyczny φ .
6. Zbadać, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierz C , taką że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
7. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((a, b)) = (a - b, a + 3b)$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}$.
8. Dla macierzy rzeczywistych: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ zbadać czy jest ona diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierze C_i , że $C_i^{-1}A_iC_i$ jest diagonalna, $i = 1, 2$.

Praca domowa

1. Udowodnij, że każda grupa rzędu 4 jest abelowa.
2. Niech $\operatorname{Aut}(G)$ będzie grupą wszystkich automorfizmów G , czyli izomorfizmów $\varphi: G \rightarrow G$. Automorfizm φ nazywa się wewnętrznym, jeśli dla pewnego $g \in G$, dla każdego $x \in G$ $\varphi(x) = g^{-1}xg$. Niech $\operatorname{Inn}(G)$ będzie zbiorem wszystkich automorfizmów wewnętrznych w G . Udowodnij, że $\operatorname{Inn}(G) \trianglelefteq \operatorname{Aut}(G)$.
3. Czy istnieje działanie grupy 21-elementowej na zbiorze 11-elementowym bez punktów stałych? Odpowiedź uzasadnij!
4. Opisz z dokładnością do izomorfizmu wszystkie obrazy homomorficzne grupy $\mathbb{Z}_{36}$.
5. Niech G będzie grupą. Wykaż, że $f: G \rightarrow G \times G$ dane wzorem $f(a) = (a^2, a)$ jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową.