

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 10. – z dystansu

27 marca 2020

1. Wyznacz liczbę nieizomorficznych grup abelowych rzędu 36 oraz 100.
2. Wyznaczyć komutant grup Σ_3 oraz A_3 .
3. Sprawdź, że permutacje $\alpha = (2, 7)(5, 8)(1, 6, 3), (4, 11, 10, 9)$ oraz $\beta = (1, 3)(4, 6)(2, 5, 8)(10, 9, 11, 7)$, $\alpha, \beta \in \Sigma_{11}$ są sprzężone.
4. Opisz moce klas elementów sprzężonych oraz centralizatorów poszczególnych elementów w Σ_5 .
5. Jaka jest liczba klas elementów sprzężonych do elementów rzędu 2 w grupie S_n ? Jakie są moce takich klas?
6. Wykaż, że jeśli grupa G działa na zbiorze X i $x \in X$ to stabilizator G_x jest podgrupą grupy G .
7. Wykaż, że jeśli grupa G działa na zbiorze X i $x \in X$, to $|G(x)| = [G : G_x]$.
8. Wykaż, że jeśli X jest skończonym zbiorem, a G działa na X oraz $|G| = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p , to moc zbioru punktów stałych $|X^G|$ daje tę samą resztę z dzielenia przez p , co $|X|$.
9. Udowodnij twierdzenie Cauchy'ego, które stanowi, że jeśli G jest skończona oraz p jest liczbą pierwszą i dzielnikiem rzędu grupy G , to w G istnieje element rzędu p .
10. Niech X będzie zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków n -kąta foremnego. Grupa D_n w sposób naturalny działa na X . Ile orbit wyznacza to działanie i jakie są ich moce?
11. Skorzystaj z twierdzenia Cauchy'ego, aby pokazać, że każda grupa rzędu 6 jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}_6$ lub z grupą D_3 .
12. Czy istnieje działanie grupy D_6 na zbiorze siedmioelementowym, które ma
 - a) dokładnie 2 orbity?
 - b) dokładnie 2 orbity, ale bez punktów stałych.
13. Czy istnieje działanie grupy o rzędzie 27 na zbiorze 35-elementowym, które nie ma punktów stałych.
14. Podać przykład działania grupy $\mathbb{Z}_6$ na zbiorze n -elementowym dla $2 \leq n \leq 11$ bez punktów stałych.
Wskazówka: rozważ permutację: $\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)(8, 9, 10, 11, 12, 13) \in \Sigma_{13}$.