

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 10. – z dystansu – rozwiązania

27 marca 2020

1. Wyznacz liczbę nieizomorficznych grup abelowych rzędu 36 oraz 100.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$. Zatem $G = P_1 \oplus P_2$, gdzie $|P_1| = 4$, $|P_2| = 9$, mamy $P_1 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ lub $P_1 = \mathbb{Z}_4$ i podobnie $P_2 = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ lub $P_2 = \mathbb{Z}_9$. Razem cztery możliwości.

$100 = 2^3 \cdot 5^2$. $G = P_1 \oplus P_2$, gdzie $|P_1| = 8$, $|P_2| = 25$, mamy $P_1 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ lub $P_1 = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ lub $P_1 = \mathbb{Z}_8$. I podobnie $P_2 = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$ lub $P_2 = \mathbb{Z}_{25}$ lub $P_2 = \mathbb{Z}_{125}$.

2. Wyznaczyć komutant grup Σ_3 oraz A_3 .

Zauważmy, że $|\Sigma_3/A_3| = 2$, zatem $\Sigma_3/A_3 \simeq \mathbb{Z}_2$ jest abelowa. W takim razie $[\Sigma_3, \Sigma_3] \subseteq A_3$. Zauważmy, jeszcze, że grupa A_3 składa się z cykli długości 3 (i ideantyczności) i każdy taki cykl jest komutatorem, mianowicie $(a, b, c) = [(a, b), (a, c)]$. Zatem $[\Sigma_3, \Sigma_3] = A_3$. Drugie spostrzeżenie jest takie, że A_3 jest już grupą abelową, więc $[A_3, A_3] = \{\text{id}\}$.

3. Sprawdź, że permutacje $\alpha = (2, 7)(5, 8)(1, 6, 3), (4, 11, 10, 9)$ oraz $\beta = (1, 3)(4, 6)(2, 5, 8)(10, 9, 11, 7)$, $\alpha, \beta \in \Sigma_{11}$ są sprzężone.

Rzeczywiście, niech

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 8 & 1 & 6 & 3 & 4 & 11 & 10 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 8 & 10 & 9 & 11 & 7 \end{pmatrix} = (1, 2)(3, 8, 6, 5, 4, 10, 11, 9, 7)$$

ma tę cechę, że $\beta = \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma$.

4. Opisz moce klas elementów sprzężonych oraz centralizatorów poszczególnych elementów w Σ_5 .

Wszystkie transpozycje są sprzężone z $(1, 2)$ i ich liczba jest równa $\binom{5}{2} = 10$. Zatem centralizator

$$|Z(\{(1, 2)\})| = |\Sigma_5|/10 = \frac{120}{10} = 12.$$

Rzeczywiście, widać, że $Z(\{(1, 2)\}) = \langle (1, 2), (3, 4), (3, 5) \rangle$ i jest to grupa rzędu 12.

Wszystkie cykle długości 3 są sprzężone z $(1, 2, 3)$ i ich liczba jest równa $\binom{5}{3} \cdot 2 = 20$. Zatem $|Z(\{(1, 2, 3)\})| = |\Sigma_5|/20 = \frac{120}{20} = 6$. Rzeczywiście, widać, że $Z(\{(1, 2, 3)\}) = \langle (1, 2, 3), (4, 5) \rangle$ i jest to grupa rzędu 6.

Cykle długości cztery są sprzężone z $(1, 2, 3, 4)$ i ich liczba jest równa $5 \cdot 3! = 30$. Zatem $|Z(\{(1, 2, 3, 4)\})| = 120/30 = 4$ i rzeczywiście, to po prostu grupa $\langle (1, 2, 3, 4) \rangle$.

Cykle długości pięć są sprzężone z $(1, 2, 3, 4, 5)$ i ich liczba jest równa $4! = 24$. Zatem $|Z(\{(1, 2, 3, 4, 5)\})| = 120/24 = 5$ i rzeczywiście, to po prostu grupa $\langle (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$.

Iloczynny dwóch rozłącznych transpozycji są wszystkie sprzężone z $(1, 2)(3, 4)$ i jest ich $5 \cdot \binom{4}{2} = 15$. Zatem $|Z(\{(1, 2)(3, 4)\})| = 120/15 = 8$. Można sprawdzić, że

$$Z(\{(1, 2)(3, 4)\}) = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 3, 2, 4) \rangle$$

i ta grupa jest właśnie rzędu 8.

W końcu iloczyn rozłącznych transpozycji i cyklu długości 3 jest sprzężony zawsze z $(1, 2)(3, 4, 5)$. Jest ich tyle, co cykli długości 3, czyli 20. Zatem $|Z(\{(1, 2, 3)(4, 5)\})| = |\Sigma_5|/20 = \frac{120}{20} = 6$, a więc to jest po prostu grupa cykliczna $\langle (1, 2), (3, 4, 5) \rangle$.

5. Jaka jest liczba klas elementów sprzężonych do elementów rzędu 2 w grupie S_n ? Jakie są moce takich klas?

Takie elementy to te permutacje, które rozkładają się na rozłączne transpozycje. Dla ustalonej liczby tych transpozycji mamy permutacje, które będą ze sobą sprzężone. Zatem takich klas jest $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Jeśli permutacja rozkłada się na k rozłącznych cykli, to liczba elementów z nią sprzężonych (permutacji rozkładających się na k transpozycji) wynosi

$$\frac{\binom{n}{k}(n-k) \cdot \dots \cdot (n-2k+1)}{2^k}.$$

6. Wykaż, że jeśli grupa G działa na zbiorze X i $x \in X$ to stabilizator G_x jest podgrupą grupy G .

Jasne, bo jeśli $g(x) = x$ oraz $h(x) = x$, to $h(g(x)) = x$, więc $hg \in G_x$. Podobnie, $1 \in G_x$, bo $1(x) = x$ i w końcu, jeśli $g(x) = x$, to $g^{-1}(x) = x$.

7. Wykaż, że jeśli grupa G działa na zbiorze X i $x \in X$, to $|G(x)| = [G : G_x]$.

Zauważmy, że $g(x) = h(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(h^{-1}(x)) = x$, zatem wtedy i tylko wtedy, gdy $gh^{-1} \in G_x$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $gG_x = hG_x$. Zatem warstw stabilizatora jest tyle samo, co punktów orbity.

8. Wykaż, że jeśli X jest skończonym zbiorem, a G działa na X oraz $|G| = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p , to moc zbioru punktów stałych $|X^G|$ daje tę samą resztę z dzielenia przez p , co $|X|$.

Suma długości orbit jednoelementowych jest równa mocy $|X^G|$, za to moc każdej innej orbity jest podzielna przez p na mocy twierdzenia Lagrange'a, a X jest sumą teorii mnogościową wszystkich swoich orbit.

9. Udowodnij twierdzenie Cauchy'ego, które stanowi, że jeśli G jest skończona oraz p jest liczbą pierwszą i dzielnikiem rzędu grupy G , to w G istnieje element rzędu p .

Niech $X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p : g_1 \cdot \dots \cdot g_p = 1\}$. Zbiór X ma $|G|^{p-1}$ elementów, w szczególności ma moc podzielną przez p . Rozważmy działanie grupy Σ_X na zbiorze X . Niech $f \in \Sigma_X$ takie, że $f((g_1, \dots, g_p)) = (g_p, g_1, \dots, g_{p-1})$. Oczywiście $o(f) = p$, zatem $\langle f \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$. Zauważamy też, że

$$X^{\langle f \rangle} = \{(g, \dots, g) \in G \times \dots \times G : g^p = 1\},$$

ale w takim razie na mocy poprzedniego zadania, $|X^{\langle f \rangle}|$ dzieli się z tą samą resztą przez p , co $|X|$. Ale $|X^{\langle f \rangle}|$ jest niepusty, więc musi mieć co najmniej p elementów, w tym $p-1$ różnych od $(1, 1, \dots, 1)$. Skoro jednak $g \neq 1$ oraz $g^p = 1$ i p jest pierwsza, to $o(g) = p$.

10. Niech X będzie zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru wierzchołków n -kąta foremnego. Grupa D_n w sposób naturalny działa na X . Ile orbit wyznacza to działanie i jakie są ich moce?

Niech $\{u, v\} \in X$. Jeśli u, v to nie są wierzchołki przeciwległe, to do $G_{\{u, v\}}$ należy identyczność oraz symetria osiowa o osi prostopadłej do uv . Jeśli są one przeciwległe to dodatkowo jeszcze obrót o π oraz symetria osiowa względem osi uv . Czyli w pierwszym przypadku moc stabilizatora to 2, a w drugim 4. Zatem moc orbit to odpowiednio $|D_n|/2 = 2n/2 = n$ oraz $|D_n|/4 = 2n/4 = n/2$ (ten przypadek może zachodzić tylko, gdy n jest parzyste).

Zatem jeśli n jest nieparzyste, to wszystkie orbity mają po n elementów, więc jest ich $\frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$. Jeśli n jest parzyste, to mamy jedną orbitę drugiego typu – zawiera ona wszystkie pary przeciwległych wierzchołków. Pozostałe $\binom{n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$ elementów jest podzielona na orbity o mocy n , których w takim razie jest $\frac{n-2}{2}$, czyli razem mamy tu $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ orbit.

11. Skorzystaj z twierdzenia Cauchy'ego, aby pokazać, że każda grupa rzędu 6 jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}_6$ lub z grupą D_3 .

Jeśli w grupie G istnieje element rzędu 6, to $G \simeq \mathbb{Z}_6$. Załóżmy więc, że taki element nie istnieje. Z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że w każdej takiej grupie jest element rzędu 2, nazwijmy go a , oraz element rzędu 3, nazwijmy go b . Mamy też różny od tych element $b^{-1} = b^2$ również rzędu 3. Zauważmy, że $\langle a, b \rangle$ ma rząd 6, więc generuje całą grupę G . Mamy zatem dwa elementy różne od siebie i od poprzednich, ab i ab^2 . ba musi być równy któremuś z nich. Jeśli $ba = ab$, to $abab = baab = b^2$, czyli ab jest rzędu 6, a zatem $ba = ab^2$. Ale wtedy $a \mapsto \varepsilon$, $b \mapsto \rho$ jest izomorfizmem.

12. Czy istnieje działanie grupy D_6 na zbiorze siedmioelementowym, które ma

- a) dokładnie 2 orbity?
- b) dokładnie 2 orbity, ale bez punktów stałych.

Jak podzielimy ten zbiór na orbity to ich moce muszą się sumować do liczby elementów, czyli 7, ale każda z nich musi być dzielnikiem rzędu grupy, czyli 12. $7 = 1 + 6$ – i można sobie to działanie wyobrazić w ten sposób, że z tych 6 punktów tworzymy sześciokąt, a siódmy jest jego środkiem, więc pozostaje stały przy wszystkich izometriach. Czyli na pierwsze pytanie odpowiedź jest pozytywna.

Jest tylko jeden podział liczby 7 na dwa dzielniki liczby 12 różne od 1, czyli $7 = 3 + 4$. Niech $X = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}, (1, 3, 5), (2, 4, 6), (5, 3, 1), (6, 4, 2)\}$, czyli zbiór złożony z dwóch części – dwuelementowych zbiorów przeciwnych wierzchołków oraz cykli co dwa wierzchołki w obu orientacjach. Oba te podzbiory dają swoją pojedynczą orbitę w naturalnym działaniu D_6 (traktujemy liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 jako kolejne wierzchołki sześciokąta foremnego).

13. Czy istnieje działanie grupy o rzędzie 27 na zbiorze 35-elementowym, które nie ma punktów stałych.

Dzielnikami > 1 liczby 27 są 3, 9 i 27. Ale 35 nie dzieli się przez 3, czyli nie da się zapisać jako suma takich dzielników (a moc każdej orbity jest dzielnikiem rzędu grupy). Zatem musi być orbita o mocy 1, czyli punkt stały.

14. Podać przykład działania grupy $\mathbb{Z}_6$ na zbiorze n -elementowym dla $2 \leq n \leq 11$ bez punktów stałych.

Wskazówka: rozważ permutację: $\sigma = (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)(8, 9, 10, 11, 12, 13) \in \Sigma_{13}$.

Mamy $o(\sigma) = 6$, więc $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$. Wystarczy zatem, że będziemy myśleć nad działaniem grupy G . Działa ona bez punktów stałych na zbiorach: $\{1, 2\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5, 6, 7\}$, $\{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.