

Matematyka dla Wydziału Geologii, semestr 2., 2019/2020

ćwiczenia 1. – rozwiązania

19 lub 20 lutego 2020

1. Sprawdź korzystając z definicji granicy funkcji Heinego, że $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

Z definicji Heinego: rzeczywiście, jeśli $x_n \rightarrow 3$, to z twierdzenia o arytmetyce granic, $x_n \cdot x_n \rightarrow 9$. $\square$

2. Oblicz, o ile istnieją, granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$$

Na podstawie arytmetyki granic, mianownik zbiega przy $x \rightarrow \infty$ do ∞ , więc całość do zera.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Ponieważ liczymy granicę dla $x \rightarrow 1$, to wygodnie będzie wyciągnąć z licznika $x - 1$, czyli:

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48}$

Widać, że -2 jest pierwiastkiem i licznika i mianownika, a zatem wyciągamy przed nawias $(x + 2)$:

$$\frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48} = \frac{(x + 2)(x^3 + 3x^2 + 5x + 6)}{(x + 2)(x^2 + 14x + 24)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 14x + 24}$$

Ponieważ nadal -2 jest pierwiastkiem, to wyciągamy przed nawias $(x + 2)$ ponownie:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 14x + 24} = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 14x + 24} = \frac{(x + 2)(x^2 + x + 3)}{(x + 2)(x + 12)} = \frac{x^2 + x + 3}{x + 12} \xrightarrow{x \rightarrow -2} \frac{-1}{10}.$$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$

Skorzystam z podstawienia $y(x) = \sqrt[15]{x}$. Zauważmy, że jeśli $x \rightarrow -1$, to $y \rightarrow -1$, co więcej $y = -1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -1$. a zatem:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{1 + y^5}{1 + y^3} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{(y + 1)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1)}{(y + 1)(y^2 - y + 1)} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{y^4 - y^3 + y^2 - y + 1}{y^2 - y + 1} = \frac{5}{3}.$$

3. Zbadaj ciągłość następujących funkcji:

a) $y(x) = |x - 2|$

Ta funkcja jest ciągła wszędzie. Jedyłą wątpliwość mógłby budzić punkt $x = 2$, ale $\lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 2| = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 2| = \lim_{x \rightarrow 2^+} -x + 2 = 0$, zatem $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0 = f(2)$.

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Nie budzi wątpliwości, że ta funkcja jest ciągła poza punktem $x = 0$. Ale jest ciągła także w punkcie $x = 0$, bowiem jeśli $x_n \rightarrow 0$, to ciąg $x_n \sin \frac{1}{x_n}$ jest iloczynem ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego, a zatem całość jest zbieżna do zera. Zatem z def. Heinego, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Zatem ta funkcja jest ciągła.

c) $g(x) = x - \lfloor x \rfloor$

Ta funkcja generuje część ułamkową liczby. Zatem jeśli $x \in [n, n+1)$ dla $n \in \mathbb{Z}$, to $g(x) = x - n$ jest ciągła wewnątrz tego przedziału. Jedyne miejsca, w których może być nieciągła, to x całkowite. I rzeczywiście, jeśli $z \in \mathbb{Z}$, to $\lim_{x \rightarrow z^+} g(x) = x - z = 0$, ale $\lim_{x \rightarrow z^-} g(x) = x - (z - 1) = 1$, czyli ta funkcja nie ma granicy w punktach całkowitych i zatem nie jest ciągła w tych punktach.

d) $h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Ta funkcja jest ciągła w punkcie $x = 0$. Bowiem jeśli $x_n \rightarrow 0$, to $-|x_n| \leq h(x_n) \leq |x_n|$, więc z twierdzenia o trzech ciągach $h(x_n) \rightarrow 0$, a zatem $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$.

Nie jest natomiast ciągła dla $x \neq 0$.

4. Zbadaj ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

Oczywiście f jest ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, bowiem dla $x \in (z, z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$, mamy $f(x) = z$. Tymczasem, jeśli w punkcie $z \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} (z - 1) = z - 1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} z = z,$$

czyli granice jednostronne są różne. f nie ma w punktach całkowitych granicy, zatem też nie jest ciągła.

b) $g(x) = x \lfloor x \rfloor$

Oczywiście f jest ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, bowiem dla $x \in (z, z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$, mamy $f(x) = x(z+1)$. Tymczasem, jeśli w punkcie $z \in \mathbb{Z}$ mamy $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} xz = z^2$ oraz $\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} x(z+1) = z^2 + z$, czyli granice jednostronne są różne dla każdego $z \neq 0$. f nie ma w niezerowych punktach całkowitych granicy, zatem też nie jest w nich ciągła. Natomiast dla $z = 0$, mamy $z^2 = z^2 + z$, zatem f ma granicę w zerze i ta granica wynosi zero, tyle, co $f(0)$. Zatem f jest ciągła w punkcie 0.

5. Udowodnij, że wielomian $2x^5 - 3x^3 + x^2 + 4$ ma w przedziale $(-2, 1)$ co najmniej jeden pierwiastek.

Zauważmy, że $w(-2) = -64 + 24 + 4 + 4 = -32 < 0$ oraz $w(1) = 2 - 3 + 1 + 4 = 4 > 0$, a zatem z własności Darboux istnieje $x \in (-2, 1)$, że $w(x) = 0$. $\square$

6. Wykaż, że równanie $\operatorname{tg} x = x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Rzeczywiście, funkcja $h(x) = \operatorname{tg} x - x$ jest ciągła na każdym przedziale

$$(-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi)$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow -\pi/2 + k\pi^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

i $\lim_{x \rightarrow -\pi/2 + k\pi^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, zatem w każdym takim przedziale istnieją punkty x_0, x_1 , że $f(x_0) < 0 < f(x_1)$, a zatem z własności Darboux wynika teza.

7. Naszkicować wykres funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}, x \geq 0.$$

Dla $0 \leq x \leq 1$ mamy $1 \leq \sqrt[n]{1 + x^n} \leq \sqrt[n]{2}$. Ale ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, to z twierdzenia o trzech ciągach, w tym przypadku $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n} = 1$.

Dla $x > 1$ mamy $x < \sqrt[n]{1 + x^n} < \sqrt[n]{2x^n} = \sqrt[n]{2}x$, więc znowu z twierdzenia o trzech ciągach, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n} = x$. Zatem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}.$$

