

# Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

## ćwiczenia 5.

10 marca 2020

1. Udowodnij, że jeśli  $P$  jest dziedziną euklidesową, i  $p \in P$  to  $N(p) = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  jest odwracalny.
2. Oblicz  $\text{nwd}(1 + 5i, 1 + 3i)$  w  $\mathbb{Z}[i]$  oraz liczby  $x, y \in \mathbb{Z}[i]$  takie, że  $x(1 + 5i) + y(1 + 3i) = \text{nwd}(1 + 5i, 1 + 3i)$ .
3. Znajdź  $\text{nwd}(x^6 + x + 1, x^2 + x + 1)$  w pierścieniu  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
4. Wykaż, że  $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$  nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.
5. Niech  $P$  będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Wielomian  $f = a_n x^n + \dots + a_0$  nazywamy wielomianem pierwotnym, jeśli jego współczynniki są względnie pierwsze, czyli  $1 \sim \text{nwd}(a_0, \dots, a_n)$ . Wykaż, że każdy wielomian  $f \in P[x]$  można przedstawić jako  $a \cdot g$ , gdzie  $z \in P$  (zwane zawartością  $f$ ), a  $g$  jest wielomianem pierwotnym. Ponadto to przedstawienie jest jednoznaczne, tzn. jeśli  $z, z' \in P$ , a  $g, g'$  to wielomiany pierwotne i  $zg = z'g'$ , to  $z \sim z'$  (w  $P$ ) oraz  $g \sim g'$  (w  $P[x]$ ).
6. Udowodnij, że  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  jest dziedziną euklidesową.
7. Zbadaj, czy wielomian  $2x^5 + 4x^4 + 12x + 4$  jest rozkładalny w każdym z pierścieni:  $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$  i  $\mathbb{Z}[x]$ .
8. Niech  $P$  będzie dziedziną euklidesową z normą  $N$  oraz  $x, y \in P$ .
  - a) Zbadaj, czy jeśli  $x \sim y$ , to  $N(x) = N(y)$ ?
  - b) Zbadaj, czy jeśli  $N(x) = N(y)$ , to  $x \sim y$ ?
9. Udowodnij, że jeśli wielomiany  $f$  oraz  $g$  są pierwotne w  $P[x]$ , gdzie  $P$  jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu i stowarzyszone w  $K[x]$ , gdzie  $K$  jest ciałem ułamków pierścienia  $P$ , to wielomiany  $f$  i  $g$  są stowarzyszone w  $P[x]$ .
10. Zbadaj, czy pierścień  $P = \mathbb{R}[x^4, x^3] = \text{lin}\{x^{4n+3m}, n, m, \in \mathbb{N}\}$  jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.
11. Wykaż, że  $\mathbb{R}[x]/((x+1)x)$  zawiera niezerowe dzielniki zera, ale nie zawiera elementów nilpotentnych.
12. Niech  $P = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ . Wykaż, że:
  - a) ideał  $(3 + i\sqrt{5})P + 4P$  nie jest główny.
  - b) ideał  $(3 + i\sqrt{5})P + 3P$  jest główny.
13. Udowodnij, że jeśli  $P$  jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, to iloczyn skończonej liczby wielomianów pierwotnych w  $P[x]$  jest wielomianem pierwotnym.