

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 5. – rozwiązania

10 marca 2020

1. Udowodnij, że jeśli P jest dziedziną euklidesową, i $p \in P$ to $N(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy p jest odwracalny.

Rzeczywiście, jeśli p jest odwracalny, to $pq = 1$, więc $N(p)N(q) = 1$, czyli $N(p) = N(q) = 1$.

Z drugiej strony, jeśli $N(p) = 1$, to $p \neq 0$, czyli dla każdego $a \in P$ istnieją q, r , że $a = pq + r$ i $N(r) < N(p)$. Weźmy $a = 1$. Czyli $1 = pq + r$, ale w takim razie $N(r) < 1$, czyli $N(r) = 0$, a więc $r = 0$.

2. Oblicz $\text{nwd}(1 + 5i, 1 + 3i)$ w $\mathbb{Z}[i]$ oraz liczby $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $x(1 + 5i) + y(1 + 3i) = \text{nwd}(1 + 5i, 1 + 3i)$.

Mamy $\frac{1+5i}{1+3i} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$, więc $1 + 5i = 2(1 + 3i) - 1 - i$. $\frac{1+3i}{-1-i} = -2 - i$, więc $1 + 3i = (-2 - i)(-1 - i) + 0$, zatem $\text{nwd}(1 + 5i, 1 + 3i) \sim -1 - i \sim 1 + i$.

$$1 + i = 2(1 + 3i) - 1 \cdot (1 + 5i).$$

3. Znajdź $\text{nwd}(x^6 + x + 1, x^2 + x + 1)$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[x]$.

$x^6 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x + 1)(x^2 + x + 1) + x$, $x^2 + x + 1 = (x + 1)x + 1$, $x = 1 \cdot x + 0$, zatem szukany dzielnik to 1.

4. Wykaż, że $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{7})(1 - i\sqrt{7}).$$

Sprawdźmy jeszcze, że te elementy są nierozkładalne. Zakładając, że

$$2 = (a + bi\sqrt{7})(c + di\sqrt{7}),$$

więc

$$4 = (a^2 + 7b^2)(c^2 + 7d^2),$$

ale nie może być, żeby którykolwiek z tych nawiasów był równy 2. Podobnie

$$(1 \pm i\sqrt{7}) = (a + bi\sqrt{7})(c + di\sqrt{7}),$$

$$8 = (a^2 + 7b^2)(c^2 + 7d^2),$$

ale żaden z tych nawiasów nie może być równy 2, więc któryś musi być równy 1.

Skoro te rozkład mają różną liczbę elementów, to są różne.

5. Niech P będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Wielomian $f = a_n x^n + \dots + a_0$ nazywamy wielomianem pierwotnym, jeśli jego współczynniki są względnie pierwsze, czyli $1 \sim \text{nwd}(a_0, \dots, a_n)$. Wykaż, że każdy wielomian $f \in P[x]$ można przedstawić jako $a \cdot g$, gdzie $z \in P$ (zwane zawartością f), a g jest wielomianem pierwotnym. Ponadto to przedstawienie jest jednoznaczne, tzn. jeśli $z, z' \in P$, a g, g' to wielomiany pierwotne i $zg = z'g'$, to $z \sim z'$ (w P) oraz $g \sim g'$ (w $P[x]$).

Niech $z = \text{nwd}(a_0, \dots, a_n)$. Wtedy niech $b_i \cdot z = a_i$ oraz $g = b_n x^n + \dots + b_0$. Jest jasne, że $\text{nwd}(b_n, \dots, b_0) \sim 1$. Jeśli natomiast $zg = z'g'$, to zarówno z , jak i z' to nwd współczynników tego wielomianu. Zatem $z \sim z'$, co pokazuje, że współczynniki, a zatem i same wielomiany są stowarzyszone.

6. Udowodnij, że $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jest dziedziną euklidesową.

Rozważmy normę $N(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$. To jest norma, bowiem $a^2 - 2b^2 = 0$, wtedy i tylko gdy $a = b = 0$ (oczywiście $a, b \in \mathbb{Z}$). Co więcej

$$N(a + b\sqrt{2})N(c + d\sqrt{2}) = |(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2)| = |a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 4b^2d^2|.$$

$$N((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) = N(ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}) = |a^2c^2+4b^2d^2-2a^2d^2-2b^2c^2|$$

– zgadza się.

Dowodźmy, że jest euklidesowa. Niech $x = a+b\sqrt{2}$ oraz $y = c+d\sqrt{2}$. Wobec tego niech $\frac{x}{y} = e+f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Niech $e', f' \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $|e - e'| \leq 1/2$ oraz $|f - f'| \leq 1/2$. Niech $z = e + f\sqrt{2}$ oraz $r = x - yz$. Zatem $r = y(e' + f'\sqrt{2} - e - f\sqrt{2})$, zatem

$$N(r) = N(y)N(e' + f'\sqrt{2} - e - f\sqrt{2}) \leq N(y)|1/4 - 2 \cdot 1/4| < N(y).$$

7. Zbadaj, czy wielomian $2x^5 + 4x^4 + 12x + 4$ jest rozkładalny w każdym z pierścieni: $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$.

Oczywiście jest rozkładalny nad $\mathbb{C}$, bo to ciało algebraicznie domknięte. Ma pierwiastek rzeczywisty, bo jest nieparzystego stopnia, więc jest rozkładalny nad $\mathbb{R}$. Jest też rozkładalny nad $\mathbb{Z}$, bo $2x^5 + 4x^4 + 12x + 4 = 2(x^5 + 2x^4 + 6x + 4)$ – nad $\mathbb{Z}$ 2 jest nieodwracalne.

Pozostaje $\mathbb{Q}$. Ten wielomian jest rozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy rozkładalny jest wielomian $x^5 + 2x^4 + 6x + 2$. On za to nie jest rozkładalny z kryterium Eisensteina dla $p = 2$.

8. Niech P będzie dziedziną euklidesową z normą N oraz $x, y \in P$.

- a) Zbadaj, czy jeśli $x \sim y$, to $N(x) = N(y)$?

Tak, bo norma elementu odwracalnego jest równa zawsze 1. Rzeczywiście, skoro $N(1) = 1$, a skoro $ab = 1$, czyli $N(a)N(b) = 1$, to $N(a) = N(b) = 1$.

- b) Zbadaj, czy jeśli $N(x) = N(y)$, to $x \sim y$?

Nie, np. w $\mathbb{Z}[i]$, $N(5) = 25 = N(3+4i)$, ale 5 i $3+4i$ nie są stowarzyszone, bo gdyby były, to $5(a+bi) = (3+4i)$, zatem $25(a^2+b^2) = 25$, ale ani dla $a = 1, b = 0$, ani dla $a = 0, b = 1$ nie dostajemy $5(a+bi) = (3+4i)$.

9. Udowodnij, że jeśli wielomiany f oraz g są pierwotne w $P[x]$, gdzie P jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu i stowarzyszone w $K[x]$, gdzie K jest ciałem ułamków pierścienia P , to wielomiany f i g są stowarzyszone w $P[x]$.

Skoro wielomiany f, g są stowarzyszone w $K[x]$, to istnieją $a, b \in P$, że $f = ab^{-1}g$, czyli $bf = ag$, ale skoro f i g były pierwotne, to $b \sim a$, a f i g są stowarzyszone w $P[x]$.

10. Zbadaj, czy pierścień $P = \mathbb{R}[x^4, x^3] = \text{lin}\{x^{4n+3m}, n, m, \in \mathbb{N}\}$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Jasne jest, że x^3 i x^4 są nierozkładalne, ale $x^{12} = x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$ są dwoma różnymi rozkładami, bo mają różną liczbę elementów. Więc to nie jest dziedzina z jednoznacznością rozkładu.

11. Wykaż, że $\mathbb{R}[x]/((x+1)x)$ zawiera niezerowe dzielniki zera, ale nie zawiera elementów nilpotentnych.

Niech $I = ((x+1)x)$. Mamy $(x+I)((x+1)+I) = 0+I$. Oczywiście, $x, x+1 \notin I$, więc te dwie warstwy są niezerowe, czyli są niezerowymi dzielnikami zera.

Założmy teraz, że $w^n \in I$, czyli $w^n = v((x+1)x)$, to oznacza, że w ma pierwiastki 0 i 1, a zatem $w \in I$, czyli warstwa $w+I$ jest zerowa. Zatem nie ma niezerowych elementów nilpotentnych.

12. Niech $P = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. Wykaż, że:

- a) ideał $(3+i\sqrt{5})P+4P$ jest główny.

Jeśli $(3+i\sqrt{5}), 4 \in (a+bi\sqrt{5})$, to $(3+i\sqrt{5}) = (a+bi\sqrt{5})(c+di\sqrt{5})$, zatem $14 = (a^2+5b^2)(c^2+5d^2)$. Żaden z tych nawiasów nie może być równy 2, zatem $a = 1, b = 0$ lub $a = 3, b = 1$. Pierwszy przypadek nas nie interesuje, bo $1 \notin (3+i\sqrt{5}, 4)$. Rzeczywiście, jest tak, bo kwadrat modułu każdej liczby w $(3+i\sqrt{5}, 4)$ jest podzielny przez 2. Zakładając drugi przypadek mamy $4 = (3+i\sqrt{5})(e+fi\sqrt{5})$, zatem $16 = 14(e^2+5f^2)$, co daje sprzeczność.

- b) ideał $(3+i\sqrt{5})P+3P$ jest główny.

Rzeczywiście, $(3+i\sqrt{5}, 3) = (1)$, bowiem $1 = ((3+i\sqrt{5})-3)^2 + 2 \cdot 3$.

13. Udowodnij, że jeśli P jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, to iloczyn skończonej liczby wielomianów pierwotnych w $P[x]$ jest wielomianem pierwotnym.

Założmy, że f, g są pierwotne, a fg już nie. Wtedy istnieje p nierozkładalny, który dzieli wszystkie współczynniki fg , ale nie dzieli wszystkich współczynników f , ani wszystkich współczynników g . Niech a_q oraz

b_r będą niepodzielnymi przez p współczynnikami o najmniejszych wskaźnikach w wielomianach f i g .
Zatem współczynnik przy x^{q+r} w wielomianie fg , jest równy

$$a_0 b_{q+r} + \dots + a_{q+r} b_0$$

Skoro p nie dzieli a_q i nie dzieli b_r to nie dzieli $a_q b_r$ (z jednoznaczności rozkładu). Za to dzieli każdy składnik z tego wyrażenia na prawo i na lewo od $a_q b_r$ i całe wyrażenie – co jest sprzecznością.