

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 3.

3 marca 2020

1. Rozstrzygnij, które z wielomianów: $1, x+1, xy, xz+z, yz+y$ należą do ideału $(x+1, y) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y, z]$.
2. Sprawdź, czy $(3x+1, x^2+4x)$ jest główny w $\mathbb{Z}_{15}[x]$.
3. Udowodnij, że pierścienie $\mathbb{Q}[x, y]$ oraz $\mathbb{Z}[x]$ nie są pierścieniami ideałów głównych.
4. Wyznaczyć warstwy ideału $(3) \trianglelefteq \mathbb{Z}_6$.
5. Wyznaczyć warstwy ideału $(x+1) \trianglelefteq \mathbb{Z}_2[x]$.
6. Znaleźć dwuelementowy zbiór generatorów jądra homomorfizmu $h: \mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanego wzorem $h(f) = f(1, 0)$.
7. Wskazać w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ niezerowy ideał pierwszy, który nie jest maksymalny.
8. Skonstruować homomorfizm pierścienia $\mathbb{Z}_6[x]$ na ciało $\mathbb{Z}_3$. Wyznaczyć jądro.
9. Udowodnij, że $(x^3 - 2) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$ jest ideałem maksymalnym.
10. Wykazać, że pierścień $\mathbb{Z}_4/(2)$ jest izomorficzny z pierścieniem $\mathbb{Z}_2$.
11. Rozstrzygnij, czy w pierścieniach $\mathbb{Z}_6[x]/(x)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x)$ oraz $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^2+x+1)$ istnieją niezerowe dzielniki zera.
12. Udowodnij, że jeśli P jest dziedziną całkowitości, to:
 - a) $b|a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a) \subseteq (b)$,
 - b) a jest elementem odwracalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $(a) = P$.
13. Udowodnij, że jeśli (w dziedzinie P) $a \sim b$, to istnieje element odwracalny c , że $a = bc$.