

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 3. – rozwiązania

3 marca 2020

1. Rozstrzygnij, które z wielomianów: $1, x+1, xy, xz+z, yz+y$ należą do ideału $(x+1, y) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y, z]$.

Zauważmy, że jeśli $w \in (x+1, y)$, to

$$w = (ax+by+cz+d)(x+1) + (px+qy+rz+s)y = ax^2 + (b+p)xy + qy^2 + cxz + ryz + (d+a)x + (b+s)y + cz + d.$$

Więc aby $w = 1$, $a = 0$ i $d = 1$, ale wtedy mamy wyraz $(d+a)x = x$, więc nie jest to możliwe $1 \notin (x+1, y)$.

Oczywiście, $x+1 \in (x+1, y)$, $xz+z = z(x+1) \in (x+1, y)$, $xy = 0(x+1) + x \cdot y$ oraz $yz+y = y(z+1) \in (x+1, y)$.

2. Sprawdź, czy $(3x+1, x^2+4x)$ jest główny w $\mathbb{Z}_{15}[x]$.

Tak, okazuje się, że $(3x+1, x^2+4x) = \mathbb{Z}_{15}[x] = (1)$, bo $1 \in (3x+1, x^2+4x)$, bowiem $(3x+1)^2 - 9(x^2+4x) = 1$.

3. Udowodnij, że pierścienie $\mathbb{Q}[x, y]$ oraz $\mathbb{Z}[x]$ nie są pierścieniami ideałów głównych.

W pierwszym przypadku (x, y) nie jest oczywiście ideałem głównym.

W drugim $(2, x)$ nie jest ideałem głównym. Rzeczywiście, jeśli $2 = wf$, to w i f muszą być pierwszego stopnia oraz $w = \pm 1$, $f = \pm 2$, ale $1 \notin (2, x)$, więc jedyna szansa, że $(2, x) = (2)$, ale to też nieprawda, bo $x \notin (2)$.

4. Wyznaczyć warstwy ideału $(3) \trianglelefteq \mathbb{Z}_6$.

$$(3) = \{0, 3\}.$$

Są trzy warstwy: $0 + (3) = 3 + (3) = \{0, 3\}$, $1 + (3) = 4 + (3) = \{0, 3\}$ oraz $2 + (3) = 5 + (3) = \{0, 3\}$.

5. Wyznaczyć warstwy ideału $(x+1) \trianglelefteq \mathbb{Z}_2[x]$.

$(x+1)$ to wszystkie wielomiany podzielne przez $(x+1)$, czyli o pierwiastku 1. Jak do takiego wielomianu dodam wielomian, który nie ma pierwiastka w jedynce (a więc przyjmuje tam wartość 1), to nowy wielomian też przyjmuje tam wartość 1. Różnica dwóch takich wielomianów jest więc w ideale. Zatem są dwie warstwy: $0 + (x+1)$ o pierwiastku w 1 oraz $1 + (x+1)$, które w 1 przyjmują wartość 1.

6. Znaleźć dwuelementowy zbiór generatorów jądra homomorfizmu $h: \mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanego wzorem $h(f) = f(1, 0)$.

Jeśli $f(1, 0) = 0$, to znaczy, że jeśli w wielomianie f za y wstawię zero otrzymam wielomian podzielny przez $(x-1)$, czyli wyrazy, w których nie występuje y można przedstawić jako $(x-1)w(x)$. Jeśli natomiast za x wstawię jeden, to w takim razie wyrazy, w których nie występuje y , znikną, a pozostałe dzielą się przez y , zatem cały wielomian f ma postać $(x-1)w(x) + yv(x, y)$. W takim razie $\{x-1, y\}$ jest zbiorem generującym $\ker f$.

7. Wskazać w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ niezerowy ideał pierwszy, który nie jest maksymalny.

W pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$, (x) jest ideałem pierwszym, bowiem jeśli $w \cdot v$ dzieli się przez x to x dzieli się przez w lub v dzieli się przez x . Nie jest maksymalny, bo zawiera się w ideale $(2, x)$ (który swoją drogą jest maksymalny).

8. Skonstruować homomorfizm pierścienia $\mathbb{Z}_6[x]$ na ciało $\mathbb{Z}_3$. Wyznaczyć jądro.

Czyli trzeba znaleźć ideał maksymalny, i takim ideałem jest $(2, x) = \ker h$. Czyli $h(w)$ to reszta z dzielenia $a + 0$ przez 3.

9. Udowodnij, że $(x^3 - 2) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$ jest ideałem maksymalnym.

Założmy, że $vw = x^3 - 2$. Wtedy stopień v lub stopień w wynosi zero. W przeciwnym przypadku bowiem, stopień $v = 1$, a stopień $w = 2$ lub na odwrót. W obu tych przypadkach oznaczałoby to, że wielomian $x^3 - 2$ dzieli się przez wielomian stopnia pierwszego, czyli ma pierwiastek w $\mathbb{Q}$, co nie jest prawdą. Założmy, zatem, że $(x^3 - 2) \subseteq J$, gdzie J jest ideałem. Ponieważ $\mathbb{Q}$ jest ciałem, to wiemy z wykładu, że $\mathbb{Q}[x]$ jest dziedziną ideałów głównych, więc $J = (g)$. Zatem $x^3 - 2 = g \cdot w$, co oznacza, że zgodnie z naszymi rozważaniami, albo g jest stopnia zero i wtedy $J = \mathbb{Q}[x]$, albo g jest stopnia 3 i wtedy $J = I$.

10. Wykazać, że pierścień $\mathbb{Z}_4/(2)$ jest izomorficzny z pierścieniem $\mathbb{Z}_2$.

Wszystko staje się jasne, gdy zauważymy, że mamy tylko dwie warstwy $0 + (2)$ oraz $1 + (2)$.

11. Rozstrzygnij, czy w pierścieniach $\mathbb{Z}_6[x]/(x)$, $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x)$ oraz $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^2 + x + 1)$ istnieją niezerowe dzielniki zera.

Tak, $(2 + (x)) \cdot (3 + (x)) = 0 + (x)$.

Tak. Ideał $(x^2 + x)$ nie jest pierwszy, bowiem $x^2 + x = (x + 1)x$, oraz $x, x + 1 \notin (x^2 + x)$. Zatem $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x)$ nie jest dziedziną całkowitości, więc ma niezerowe dzielniki zera, np. właśnie $x + (x^2 + x)$ oraz $x + 1 + (x^2 + x)$.

W tym ostatnim pierścieniu nie istnieją dzielniki zera. $\mathbb{Z}_3$ jest ciałem, natomiast $2x^2 + x + 1$ nie ma pierwiastków, a więc jeśli $fg = 2x^2 + x + 1$, to któryś z nich jest pierwszego stopnia. Na takiej samej zasadzie, jak w zadaniu 9, w takim razie $(2x^2 + x + 1)$ jest maksymalny, a co za tym idzie $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^2 + x + 1)$ jest ciałem, więc nie ma niezerowych dzielników zera.

12. Udowodnij, że jeśli P jest dziedziną całkowitości, to:

a) $b|a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a) \subseteq (b)$,

Owszem, bo jeśli $x \in (a)$, to $x = ap = kbp \in (b)$.

Jeśli $(a) \subseteq (b)$, to $a = xb$.

b) a jest elementem odwracalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $(a) = P$.

a odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy $1 = ab$, wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in (a)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(a) = P$.

13. Udowodnij, że jeśli (w dziedzinie P) $a \sim b$, to istnieje element odwracalny c , że $a = bc$.

$a|b$ oraz $b|a$, zatem $b = ka$ oraz $a = lb$, czyli $a = kla$, czyli $kl = 1$ (bo P jest dziedziną), zatem k, l są elementami odwracalnymi.