

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 2.

28 lutego 2020

1. Udowodnij, że jeśli P jest pierścieniem (przemiennym z jedynką) oraz w jest dzielnikiem zera w $P[x]$, to istnieje $c \in P$, że $cw = 0$.
2. Udowodnij, że wielomian $w = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in P[x]$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy a_0 jest elementem odwracalnym w P , natomiast $a_1, \dots, a_n$ są nilpotentne.
3. Udowodnij, że wielomian $w \in P[x]$ jest elementem nilpotentnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego współczynniki są nilpotentne.
4. Znajdź wszystkie dzielniki zera, elementy odwracalne i elementy nilpotentne w pierścieniu $\mathbb{Z}_{12}[x]$.
5. Udowodnij, że jeśli $h: P \rightarrow R$ jest homomorfizmem, to
 - a) jeśli $J \trianglelefteq R$, to $h^{-1}[J] \trianglelefteq P$,
 - b) $\text{im}(h)$ jest podpierścieniem pierścienia R ,
 - c) jeśli $I \trianglelefteq P$, to $h[I] \trianglelefteq \text{im}(h)$.
6. Udowodnij, że pierścień jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest niezerowy i jedynymi jego ideałami są ideał zerowy i cały pierścień.
7. Wypisać wszystkie elementy ideału $(8, 6)$ w $\mathbb{Z}_{12}$.
8. Znajdź pomiędzy izomorfizm $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ oraz $\mathbb{C}$.
9. Niech $I \trianglelefteq P$. Udowodnij, że P/I jest dziedziną całkowitości wtedy i tylko wtedy, gdy I jest pierwszy.
10. Czy $(x^2 + x + 1)$ jest ideałem maksymalnym w $\mathbb{Z}_2[x]$? Odpowiedź uzasadnij!
11. Pokazać, że ideał pierścienia skończonego jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalny.
12. Zbadać, czy ideał $(x^2, x^3 + 6)$ jest główny w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$.