

Algebra 2 dla MSEM , 2019/2020

ćwiczenia 1. – rozwiązania

25 lutego 2020

1. Udowodnij, że jeśli w pierścieniu R , $0 = 1$, to R jest pierścieniem zerowym.

Rzeczywiście wtedy dla każdego $x \in R$, $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$.

2. Udowodnij, że jeśli R jest pierścieniem przemiennym z jedynką, oraz X jest dowolnym zbiorem, to R^X jest pierścieniem przemiennym z jedynką wraz z naturalnie zadanymi działaniami.

Rzeczywiście, jeśli $f, g, h \in R^X$, to

- skoro dla każdego $x \in X$, $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$, to $(f + g) + h = f + (g + h)$, i podobnie łączność mnożenia, przemienność dodawania, przemienność mnożenia i rozdzielność,
- zerem jest funkcja stale równa zero, jedynką funkcja stale równa jeden, oczywiście wtedy $\mathbf{1}(x) \cdot g(x) = 1 \cdot g(x) = g(x)$.
- $-g$ zdefiniowane jest więc jako $-g(x) = -g(x)$, wtedy oczywiście $g(x) + (-g(x)) = 0$, więc $g + (-g) = \mathbf{0}$,

3. Niech będzie dany niezerowy pierścień R z jedynką. Wykaż, że:

- a) 0 jest dzielnikiem zera i elementem nilpotentnym,

$0 \cdot 1 = 0$, więc zero jest dzielnikiem zera.

$0^1 = 0$, więc zero jest elementem nilpotentnym.

- b) jeśli $x \in R$ nie jest dzielnikiem zera oraz dla pewnych $y, z \in R$, $xy = xz$, to $y = z$,

Założmy, że x nie jest dzielnikiem zera oraz $xy = xz$. Wtedy $xy - xz = 0$, ale zauważając, że $-xz = x(-z)$ (bo jeśli $xz + x(-z) = x(z - z) = x \cdot 0 = 0$), mamy $(y - z)x = 0$, ale w takim razie $y - z$ nie może być niezerowy, zatem $y - z = 0$, czyli $y = z$.

- c) element odwracalny nie jest dzielnikiem zera, a jego odwrotność jest wyznaczona jednoznacznie.

Założmy, że a jest odwracalny, więc $ab = 1$, dla pewnego b . Ale w takim razie, jeśli a byłby dzielnikiem zera, to $ac = 0$ dla niezerowego c , zatem $0 = 0b = abc = 1c = c$, sprzeczność.

Założmy, że $ab = 1 = ac$. Wtedy, skoro a nie jest dzielnikiem zera, to z poprzedniego punktu mamy, że $b = c$.

4. Znajdź wszystkie dzielniki zera, elementy odwracalne i elementy nilpotentne w pierścieniu $\mathbb{Z}_{24}$.

Dzielniki zera to wszystkie liczby, które przemnożone przez inną liczbę niezerową z $\mathbb{Z}_{24}$ dają resztę zero w dzieleniu przez 24. Czyli są to liczby, które nie są względnie pierwsze z 24 większe od 1, a więc 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22.

Elementy odwracalne to cała reszta na podstawie kolejnego zadania.

Elementy nilpotentne to te, co mają wspólne wszystkie dzielniki pierwsze z 24, czyli: 6 i 12 oraz 0.

5. Udowodnij, że w pierścieniu skończonym każdy element niebędący dzielnikiem zera jest odwracalny.

Niech $\{0, x_1, \dots, x_n\} = R$. Niech x nie będzie dzielnikiem zera. Iloczyny $xx_1, \dots, xx_n$ są zatem parami różne i żaden z nich nie jest zerem. Zatem są to wszystkie niezerowe elementy pierścienia, czyli jeden z nich jest jedynką.

6. Znajdź wszystkie dzielniki zera, elementy odwracalne i elementy nilpotentne w pierścieniu $\mathbb{Z}_9[x]$.

Pokażmy najpierw, że, jeśli w jest dzielnikiem zera w $R[x]$, to istnieje $c \in R$, że $cw = 0$. Załóżmy, że $v \in R[x]$, że $vw = 0$, oraz v jest wielomianem o tej własności o możliwie najmniejszym stopniu równym

m . Pokażemy, że $m = 0$. Załóżmy przeciwnie, że $m > 0$. Niech $w = a_n x^n + \dots + a_0$ oraz $v = b_m x^m + \dots + b_0$. Jeśli dla każdego i , $a_i v = 0$, to $a_i b_m = 0$, to $b_m w = 0$, co przeczy minimalności m . Zatem niech l będzie maksymalną taką liczbą, że $a_l v \neq 0$.

Wtedy $0 = vw = (a_l x^l + \dots + a_0)(b_m x^m + \dots + b_0)$, czyli $a_l b_m = 0$, więc $a_l v$ jest stopnia co najwyżej $m - 1$. Ale $wa_l v = 0$, co daje sprzeczność z minimalnością m .

Zatem wielomian jest dzielnikiem zera wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich jego współczynników istnieje liczba c , że współczynniki te przemnożone przez c dają 0. Tę cechę mają więc dowolne wielomiany o współczynnikach w zbiorze $\{0, 3, 6\}$. Zauważmy też, że dowolny taki wielomian jest nilpotentny – zatem są to jedyne nilpotentne wielomiany.

Szukamy teraz elementów odwracalnych. Zauważmy, że jeśli $vw = 1$ oraz, to $a_0 b_0 = 1$, więc a_0 i b_0 są odwracalne. Wymnażając wielomiany v i w przez siebie dostajemy też, że $a_n b_m = 0$, a skoro $a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} = 0$, to $(a_n)^2 b_{m-1} = 0$. Postępując tak dalej, dowodzę, że $(a_n)^{m+1} b_0 = 0$, ale skoro b_0 jest odwracalne, więc nie jest dzielnikiem zera, to $(a_n)^{m+1} = 0$, więc a_n jest nilpotentne. Zatem nilpotentne jest $a_n x^n$, a zatem $w - a_n x^n$ jest odwracalne (bo, jeśli w jest odwracalne, a u jest nilpotentne, to $w^n = w^n - u^n = (w - u)(w^{n-1} + w^{n-2}u + \dots + u^{n-1})$, czyli $(w - u)(w^{n-1} + w^{n-2}u + \dots + u^{n-1})(w^n)^{-1} = 1$), a zatem proces możemy kontynuować. A zatem potrzeba i wystarcza, że a_0 jest odwracalne (czyli należy do $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$) a pozostałe współczynniki są nilpotentne (więc należą do zbioru $\{0, 3, 6\}$).

7. Udowodnij, że jeśli R jest dziedziną całkowitości, to $R[x]$ również jest dziedziną całkowitości.

Rzeczywiście, wystarczy spojrzeć na współczynnik przy najwyższej potędze. Przemnożony przez dowolny niezerowy wyraz, nowy współczynnik przy najwyższej potędze, to stary przemnożony przez element z R . Zatem, jeśli nie był dzielnikiem zera, to nie jest zerem.

8. Wskaż homomorfizm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$.

Takim homomorfizmem jest przyporządkowanie x jego reszty dzielenia przez n .

9. Udowodnij, że jądro dowolnego homomorfizmu pierścieni jest ideałem.

Niech $h: R \rightarrow S$, będzie homomorfizmem. Niech $a, b \in \ker h$, wtedy $h(a) = h(b) = 0$, więc $h(a + b) = h(a) + h(b) = 0$, więc $a + b \in \ker h$. Oczywiście $0 \in \ker h$. Co więcej, jeśli $c \in R$ i $a \in \ker h$, to $h(ac) = h(a)h(c) = 0h(c) = 0$, więc $ac \in \ker h$.

10. Udowodnij, że ideał jest właściwy wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera 1.

Jeśli zawiera jedynekę, to dla każdego $a \in R$, $a \cdot 1$ też jest w ideał, czyli każde $a \in R$ należy do ideału.

11. Znaleźć wszystkie ideały pierścieni $\mathbb{Z}_{15}$ oraz $\mathbb{Z}_{16}$. Wskazać wśród nich ideały pierwsze i maksymalne.

W $\mathbb{Z}_{15}$:

- $\{0\}$,
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,
- $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, – maksymalny i pierwszy
- $\{0, 5, 10\}$, – maksymalny i pierwszy

W $\mathbb{Z}_{16}$:

- $\{0\}$,
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, – maksymalny i pierwszy
- $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$,
- $\{0, 4, 8\}$,
- $\{0, 8\}$.

12. Udowodnij, że $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ jest dziedziną całkowitości, ale nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

Nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu, bo $6 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3$.

Jest dziedziną całkowitości, bowiem jeśli jakiś element byłby niezerowy dzielnikiem zera istniałyby liczby zespolone z, z' niezerowe, że $zz' = 0$, a liczby zespolone to ciało.