

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 28.

24 stycznia 2020

1. Na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowano relację $\mathcal{R}$ w następujący sposób:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

- a) Udowodnij, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.
 - b) Wykaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, że $\forall x, y \in X, x \neq y, x - y \notin \mathbb{Q}$.
2. Niech $U, W \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz $U = \text{lin}((1, 1, 1), (1, 2, 3))$, $W = \text{lin}((1, -1, 1), (4, 1, 2))$.
- a) Znaleźć wektory $u_1 \in U$, $w_1 \in W$ takie, że $u_1 + w_1 = (1, 0, 0)$.
 - b) Znaleźć wektory $u_2 \in U$, $w_2 \in W$ takie, że $u_2 + w_2 = (1, 0, 0)$ oraz $u_1 \neq u_2$.
3. Ile jest par liczb zespolonych (z, w) , które spełniają układ równań

$$\begin{cases} 2z^3 + 5w^7 = 12 \\ 3z^3 + 7w^7 = 17 \end{cases} \quad ?$$

4. Niech $V = \mathbb{Z}_2^n$ oraz

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V : \text{w ciągu } (x_1, \dots, x_n) \text{ jest parzysta liczba jedynek}\}.$$

- a) Wykaż, że W jest podprzestrzenią liniową.
 - b) Podaj przykład bazy W i oblicz $\dim W$.
 - c) Podaj przykład podprzestrzeni U przestrzeni V , takiej że $V = W \oplus U$.
5. Niech $V = \mathbb{R}^4$.

- a) Wskaż trójwymiarowe podprzestrzenie $V_1, V_2, V_3, V_4 \subseteq V$, że

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 = \{\mathbf{0}\}.$$

- b) Czy istnieją trójwymiarowe podprzestrzenie $V_1, V_2, V_3 \subseteq V$, że

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{\mathbf{0}\}?$$

6. Niech $A = \{7, 8, 9, \dots, 15\}$. Na zbiorze A określamy relację $\preceq$ następująco:

$$x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} x | y^n.$$

- a) Wykaż, że jest to częściowy porządek na zbiorze A . Czy jest to porządek liniowy?
- b) Znaleźć dowolny najdłuższy łańcuch i dowolny najdłuższy antyłańcuch w porządku $A, \preceq$. Odpowiedzi uzasadnić.
- c) Rozstrzygnij, czy identycznie zadana relacja jest częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.