

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 28. – rozwiązania

24 stycznia 2020

1. Na zbiorze liczb rzeczywistych zdefiniowano relację $\mathcal{R}$ w następujący sposób:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

a) Udowodnij, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.

Jest:

- zwrotna, bowiem $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, więc $x\mathcal{R}x$,
- symetryczna, bowiem jeśli $x\mathcal{R}y$, to $x - y \in \mathbb{Z}$, ale wtedy $y - x \in \mathbb{Z}$, więc $y\mathcal{R}x$,
- przechodnia, bowiem jeśli $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$, to $x - y \in \mathbb{Z}$ oraz $y - z \in \mathbb{Z}$, zatem $x - y + y - z = x - z \in \mathbb{Z}$, czyli $x\mathcal{R}z$.

b) Wykaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, że $\forall x, y \in X, x \neq y, x - y \notin \mathbb{Q}$.

Niech $x \simeq y$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y \in \mathbb{Q}$. Jest to relacja równoważności, bowiem jest:

- zwrotna, bowiem $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, więc $x \simeq x$,
- symetryczna, bowiem jeśli $x \simeq y$, to $x - y \in \mathbb{Q}$, ale wtedy $y - x \in \mathbb{Q}$, więc $y \simeq x$,
- przechodnia, bowiem jeśli $x \simeq y \wedge y \simeq z$, to $x - y \in \mathbb{Q}$ oraz $y - z \in \mathbb{Q}$, zatem $x - y + y - z = x - z \in \mathbb{Q}$, czyli $x \simeq z$.

Zauważ, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $x \simeq y$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$, że $x + q = y$, zatem $[x]_{\simeq} = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ jest przeliczalna. Załóżmy teraz dążąc do sprzeczności, że zbiór ilorazowy $\mathbb{R}/\simeq$ jest przeliczalny. Ale wtedy $\mathbb{R} = \bigcup_{A \in \mathbb{R}/\simeq} A$ jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych, sprzeczność. Czyli $\mathbb{R}/\simeq$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. Niech X będzie zbiorem, do którego należy dokładnie jeden element z każdej klasy abstrakcji (taki zbiór istnieje na mocy aksjomatu wyboru). Wtedy $|X| = |\mathbb{R}/\simeq|$, czyli jest nieprzeliczalny, oraz skoro $x, y \in X$, $x \neq y$ należą do różnych klas abstrakcji, czyli $x \not\simeq y$, czyli $x - y \notin \mathbb{Q}$.

2. Niech $U, W \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz $U = \text{lin}((1, 1, 1), (1, 2, 3))$, $W = \text{lin}((1, -1, 1), (4, 1, 2))$.

a) Znaleźć wektory $u_1 \in U$, $w_1 \in W$ takie, że $u_1 + w_1 = (1, 0, 0)$.

Np. $u_1 = ((1, 1, 1) - (1, 2, 3))/4 = (0, -1, -2)/4$ oraz $w_1 = (4, 1, 2)/4$.

b) Znaleźć wektory $u_2 \in U$, $w_2 \in W$ takie, że $u_2 + w_2 = (1, 0, 0)$ oraz $u_1 \neq u_2$.

Zauważam, że $x - 2y + z = 0$ opisuje U , szukam wektora z W spełniającego to równanie i jest nim wektor $(4, 1, 2)$. Zatem $(4, 1, 2) \in U \cap W$, niech więc $u_2 = (0, -1, -2)/4 + (4, 1, 2) = (4, 3/4, 3/2)$ oraz $w_2 = (4, 1, 2)/4 - (4, 1, 2) = -3(4, 1, 2)/4$.

3. Ile jest par liczb zespolonych (z, w) , które spełniają układ równań

$$\begin{cases} 2z^3 + 5w^7 = 12 \\ 3z^3 + 7w^7 = 17 \end{cases} \quad ?$$

W takim razie $w^7 = 2$, $z^3 = 1$, wobec tego jest 7 możliwych wartości w oraz 3 możliwe wartości z . Razem 21 par.

4. Niech $V = \mathbb{Z}_2^n$ oraz

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V : \text{w ciągu } (x_1, \dots, x_n) \text{ jest parzysta liczba jedynek}\}.$$

- a) Wykaż, że W jest podprzestrzenią liniową.

W to prostu przestrzeń opisana równaniem $x_1 + \dots + x_n = 0$, a zbiory rozwiązań jednorodnych układów równań są podprzestrzeniami.

- b) Podaj przykład bazy W i oblicz $\dim W$.

Zatem rozwiązanie ogólne to $x_1 = x_2 + \dots + x_n$ (pamiętamy, że w $\mathbb{Z}_2$ $1 = -1$), czyli baza to

$$((1, 1, 0, \dots, 0), (1, 0, 1, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, 1))$$

oraz $\dim W = n - 1$. Oczywiście dla $n = 1$, mamy po prostu $x_1 = 0$, zatem przestrzeń $W = \{0\}$.

- c) Podaj przykład podprzestrzeni U przestrzeni V , takiej że $V = W \oplus U$.

Zatem $U = \text{lin}((1, 0, \dots, 0))$ będzie idealny, bowiem oczywiście

$$((1, 0, \dots, 0), (1, 1, 0, \dots, 0), (1, 0, 1, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, 1))$$

jest układem liniowo niezależnym (aby to zobaczyć, trzeba wpisać je w wiersze macierzy i odjąć pierwszy wiersz od każdego następnego) o n wektorach, czyli bazą $\mathbb{Z}_2^n$.

5. Niech $V = \mathbb{R}^4$.

- a) Wskaż trójwymiarowe podprzestrzenie $V_1, V_2, V_3, V_4 \subseteq V$, że

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 = \{0\}.$$

$$V_1 = \text{lin}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)),$$

$$V_2 = \text{lin}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)),$$

$$V_3 = \text{lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)),$$

$$V_4 = \text{lin}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)).$$

Czyli V_i jest opisana równaniem $x_i = 0$, zatem ich przecięcie jest przestrzenią zerową.

- b) Czy istnieją trójwymiarowe podprzestrzenie $V_1, V_2, V_3 \subseteq V$, że

$$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}?$$

Nie. Każda z tych przestrzeni jest opisana jednym równaniem, więc ich przecięcie jest opisane co najwyżej trzema równaniami, jest więc wymiaru co najmniej 1.

6. Niech $A = \{7, 8, 9, \dots, 15\}$. Na zbiorze A określamy relację $\preceq$ następująco:

$$x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} x | y^n.$$

- a) Wykaż, że jest to częściowy porządek na zbiorze A . Czy jest to porządek liniowy?

Sprawdźmy jakie liczby są w tej relacji. Mamy tylko następujące pary:

- $7 \preceq 7, 14$,
- $8 \preceq 8, 10, 12, 14$,
- $9 \preceq 9, 12, 15$,
- $10 \preceq 10$,
- $11 \preceq 11$,
- $12 \preceq 12$,
- $13 \preceq 13$,
- $14 \preceq 14$,
- $15 \preceq 15$.

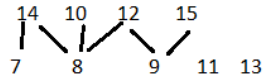
Ta relacja jest:

- zwrotna, bo $x | x^1$, więc $x \preceq x$.
- antysymetryczna, co wynika z powyższej listy.
- przechodnia, bo jeśli $x \preceq y$ oraz $y \preceq z$, to $x | y^n$, $y | z^m$, zatem $x | y^n | z^{nm}$, czyli $x \preceq z$.

Nie jest to porządek liniowy, bo $7 \not\leq 8$ oraz $8 \not\leq 7$.

- b) Znaleźć dowolny najdłuższy łańcuch i dowolny najdłuższy antyłańcuch w porządku $A, \preceq$. Odpowiedzi uzasadnić.

Diagram Hassego tego porządku wygląda następująco.



Zatem najdłuższy łańcuch jest dwuelementowy, np. $\{7, 14\}$, zaś najdłuższy antyłańcuch jest 6-cio-elementowy, np. $\{14, 10, 12, 15, 11, 13\}$.

- c) Rozstrzygnij, czy identycznie zadana relacja jest częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Nie jest to porządek częściowy na $\mathbb{N}$, bo przestaje być antysymetryczny, np. $2 \preceq 4$ oraz $4 \preceq 2$.