

# Algebra dla MSEM I, 2019/2020

## ćwiczenia 25.

14 stycznia 2020

1. Niech  $V, W$  będą przestrzeniami liniowymi nad  $K$ . Wykresem funkcji  $\varphi: V \rightarrow W$  nazywamy zbiór  $G_\varphi = \{(v, \varphi(v)): v \in V\} \subseteq V \times W$ . Wykazać, że  $\varphi$  jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy  $G_\varphi$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $V \times W$ .

2. Niech  $V, W$  będą przestrzeniami liniowymi nad  $K$  oraz niech  $W_1$  będzie podprzestrzenią przestrzeni  $W$  oraz  $V_1, V_2$  niech będą podprzestrzeniami przestrzeni  $V$ . Wykazać, że następujące zbiór

$$X = \{\varphi \in L(V, W) : \forall v \in V_1 \varphi(v) \in W_1\}$$

jest podprzestrzenią  $L(V, W)$ .

3. Określić taki izomorfizm  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , że  $\varphi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1$ . Czy istnieje izomorfizm  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  taki, że  $\varphi(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ,  $\varphi(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$  oraz  $\varphi(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ? Czy przekształcenie  $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  określone jako  $\eta((x, y, z)) = (x + y, x - y, x + z)$  jest izomorfizmem? A przekształcenie  $\eta': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  określone jako  $\eta'((x, y, z)) = (x + y, 2x + y + z, x + z)$ .

4. Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych  $\varphi: V \rightarrow W$  zbadać, czy istnieje przekształcenie  $\psi_1: W \rightarrow V$ , że  $\psi_1 \circ \varphi = id$  oraz czy istnieje przekształcenie  $\psi_2: W \rightarrow V$ , że  $\varphi \circ \psi_2 = id$ . Jeśli istnieje, podać jego wzór.

a)  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi((x, y, z)) = (3x - y + 2z, -x + 5y + 2z)$ ,

b)  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi((a, b)) = (7a + b, 2a + 3b, a - b)$ .

5. Niech  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$  oraz  $B =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Oblicz } A + 2B. \text{ Znajdź taką ma-}$$

cierz  $C$ , że  $A + C = B$ .

6. Oblicz  $A \cdot B$  dla

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B =$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Czy dla każdych macierzy  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  zachodzi  $AB = BA$ ?

8. Wykazać, że dla każdych macierzy  $A, A' \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B, B' \in M_{n \times k}(K)$  i  $C \in M_{k \times l}(K)$  zachodzi  $(AB)C = A(BC)$ ,  $A(B + B') = AB + AB'$  oraz  $(A + A')B = AB + A'B$ .

9. Wykazać, że jeśli macierz  $A \in M_{n \times n}(K)$  jest taka, że dla każdej macierzy  $C \in M_{n \times n}(K)$ ,  $AC = CA$ , to  $A = aI$ , dla pewnego  $a \in K$ .

10. Przedstawić macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.