

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 25. – rozwiązania

14 stycznia 2020

1. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K . Wykresem funkcji $\varphi: V \rightarrow W$ nazywamy zbiór $G_\varphi = \{(v, \varphi(v)): v \in V\} \subseteq V \times W$. Wykazać, że φ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy G_φ jest podprzestrzenią przestrzeni $V \times W$.

Rzeczywiście G_φ jest podprzestrzenią liniową, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $v, w \in V, a \in K$ mamy $(v, \varphi(v)) + (w, \varphi(w)) = (v + w, \varphi(v) + \varphi(w)) \in G_\varphi$ oraz $a(v, \varphi(v)) = (av, a\varphi(v)) \in G_\varphi$. Ale to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v + w)$ oraz $a\varphi(v) = \varphi(av)$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest przekształceniem liniowym.

2. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K oraz niech W_1 będzie podprzestrzenią przestrzeni W oraz V_1, V_2 niech będą podprzestrzeniami przestrzeni V . Wykazać, że następujące zbiór

$$X = \{\varphi \in L(V, W) : \forall v \in V_1 \varphi(v) \in W_1\}$$

jest podprzestrzenią $L(V, W)$.

Rzeczywiście dla $\phi, \varphi \in X$, oraz dla każdego $v \in V_1$ mamy $(\phi + \varphi)(v) = \phi(v) + \varphi(v) \in W_1$, ponieważ W_1 jest podprzestrzenią. Zatem $\phi + \varphi \in X$. Podobnie dla $a \in K, v \in V_1, (a\varphi)(v) = a\varphi(v) \in W_1$, zatem $a\varphi \in X$.

3. Określić taki izomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $\varphi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1$. Czy istnieje izomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taki, że $\varphi(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varphi(\varepsilon_2) = \varepsilon_3$ oraz $\varphi(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$? Czy przekształcenie $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone jako $\eta((x, y, z)) = (x + y, x - y, x + z)$ jest izomorfizmem? A przekształcenie $\eta': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określone jako $\eta'((x, y, z)) = (x + y, 2x + y + z, x + z)$.

Np.: $\varphi(x, y, z) = ((x + y)/2, y - x, z)$ przekształca bazę $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ na bazę

$$((1/2, -1, 0), (1/2, 1, 0), (0, 0, 1))$$

oraz wektor $(1, 1, 0)$ na $(1, 0, 0)$ zgodnie z wymaganiami z zadania.

Nie, bowiem $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ oraz $(1, 1, 1)$ nie stanowi bazy.

Tak, η jest izomorfizmem, bo $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 1)$ to baza $\mathbb{R}^3$.

Nie, η' nie jest izomorfizmem, bo $(1, 2, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$ nie jest bazą $\mathbb{R}^3$.

4. Dla każdego z poniższych przekształceń liniowych $\varphi: V \rightarrow W$ zbadać, czy istnieje przekształcenie $\psi_1: W \rightarrow V$, że $\psi_1 \circ \varphi = id$ oraz czy istnieje przekształcenie $\psi_2: W \rightarrow V$, że $\varphi \circ \psi_2 = id$. Jeśli istnieje, podać jego wzór.

a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y, z)) = (3x - y + 2z, -x + 5y + 2z),$

Jasne jest, że jest to epimorfizm, ale nie monomorfizm. Zatem istnieje ψ_2 , ale nie ψ_1 . Musi być $\psi_2((3, -1)) = (1, 0, 0), \psi_2((-1, 5)) = (0, 1, 0)$. Zatem $\psi_2((1, 0)) = (5/14, 1/14, 0)$ oraz $\psi_2((0, 1)) = (1/14, 3/14, 0)$.

b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((a, b)) = (7a + b, 2a + 3b, a - b).$

Jasne jest, że to nie jest epimorfizm, jest natomiast mono, bo $(7, 2, 1), (1, 3, -1)$ są liniowo niezależne. Zatem jest ψ_1 , ale nie ma ψ_2 . Musi być $\psi_1((7, 2, 1)) = (1, 0), \psi_1((1, 3, -1)) = (0, 1)$. Mogę ponadto przyjąć, że $\psi_1((0, 0, 1)) = (0, 0)$. Zatem $\psi_1((1, 0, 0)) = (3/19, -2/19), \psi_1((0, 1, 0)) = (-1/19, 7/19)$.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz $A+2B$. Znajdź taką macierz C , że $A+C=B$.

$$A+2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Oblicz $A \cdot B$ dla

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

a)

$$AB =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 10 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 17 & -7 \\ 4 & 9 & -4 \\ 8 & 10 & -4 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

7. Czy dla każdych macierzy $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ zachodzi $AB = BA$?

Rozwiązanie: Nie. Np. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ale $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Wykazać, że dla każdych macierzy $A, A' \in M_{m \times n}(K)$, $B, B' \in M_{n \times k}(K)$ i $C \in M_{k \times l}(K)$ zachodzi $(AB)C = A(BC)$, $A(B+B') = AB + AB'$ oraz $(A+A')B = AB + A'B$.

Niech $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $B' = [b'_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$. Mamy $AB = [\sum_{a=1}^n a_{ia}b_{aj}]_{i,j}$, czyli $(AB)C = [\sum_{b=1}^k \sum_{a=1}^n a_{ia}b_{ab}c_{bj}]_{i,j}$. Podobnie $BC = [\sum_{a=1}^n b_{ia}c_{aj}]_{i,j}$, zatem $A(BC) = [\sum_{b=1}^k \sum_{a=1}^n a_{ia}b_{ab}c_{bj}]_{i,j}$, czyli $(AB)C = A(BC)$.

Mamy też $B+B' = [b_{ij}+b'_{ij}]$, zatem $A(B+B') = [\sum_{a=1}^n a_{ia}(b_{aj}+b'_{aj})]_{i,j}$, tymczasem $AB = [\sum_{a=1}^n a_{ia}b_{aj}]_{i,j}$ i $AB' = [\sum_{a=1}^n a_{ia}b'_{aj}]_{i,j}$, czyli $AB + AB' = [\sum_{a=1}^n a_{ia}(b_{aj} + b'_{aj})]_{i,j} = A(B+B')$. Ostatnią równość dowodzimy analogicznie.

9. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ jest taka, że dla każdej macierzy $C \in M_{n \times n}(K)$, $AC = CA$, to $A = aI$, dla pewnego $a \in K$.

Rzeczywiście, mnożąc macierz A przez macierz C zawierającą same zera, poza elementem jeden w i -tym wierszu j -tej kolumnie z lewej (CA) dostanę macierz samych zer za wyjątkiem i -tego wiersza, który będzie taki sam, jak j -ty wiersz w macierzy A . Z drugiej strony, mnożąc z prawej przez tę macierz AC dostanę

macierz samych zer, za wyjątkiem j -tej kolumny, gdzie dostanę i -tą kolumnę macierzy A . Co oznacza, że wszystkie wyrazy w j -tym wierszu macierzy A są zerami, za wyjątkiem j -tego wyrazu, który zgadza się z i -tym wyrazem w i -tej kolumnie. Po uwzględnieniu dowolności i oraz j , dostajemy, że macierz A ma zera poza przekątną, a wszystkie wyrazy na przekątnej muszą być równe.

10. Przedstawić macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 - 3w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 2w_2, w_3 - w_2, w_4 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \cdot (1/2)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_3, w_2 - w_3, w_4 + 3w_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \cdot (1/13)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - 14w_4, w_2 + 7w_4, w_3 - 3w_4} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem ta macierz to:

$$\begin{aligned} & T_{12}^4 E_{21}^4(3) E_{31}^4(2) E_{41}^4(3) E_{12}^4(2) E_{32}^4(1) E_{42}^4(2) \cdot \\ & \cdot I_4^4(2) T_{34}^4 E_{13}^4(-1) E_{23}^4(1) E_{43}^4(-3) I_4^4(13) E_{14}^4(14) E_{24}^4(-7) E_{34}^4(3). \end{aligned}$$