

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 24. – rozwiązania zadań domowych

10 stycznia 2020

1. Niech $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie zadane następująco $\varphi((1, -1)) = (1, 1, 2)$, $\varphi((-1, 0)) = (-1, 1, 0)$. Znaleźć wzór na 2φ .

Widać, że $(1, 0) = 0 \cdot (1, -1) - 1 \cdot (-1, 0)$ (współrzędne: 0,-1) oraz $(0, 1) = -(1, -1) - (-1, 0)$ (współrzędne: -1,-1). A zatem $\varphi((x, y)) = x\varphi((1, 0)) + y\varphi((0, 1)) = x(-\varphi((-1, 0))) + y(-\varphi((1, -1)) - \varphi((-1, 0))) = x(-(-1, 1, 0)) + y(-(1, 1, 2) - (-1, 1, 0)) = x(1, -1, 0) + y(0, -2, -2) = (x, -x-2y, -2y)$. Oraz $2\varphi((x, y)) = (2x, -2x-4y, -4y)$

2. Znaleźć bazy i wymiar jądra oraz obrazu φ z poprzedniego zadania.

Mamy $\text{im}\varphi = \text{lin}(\varphi(1, 0), \varphi(0, 1)) = \text{lin}((1, -1, 0), (0, -2, -2))$ – widać że te dwa wektory są liniowo niezależne, więc są bazą wymiaru i $\dim \text{im}\varphi = 2$. Zatem $\dim \ker \varphi = 2 - \dim \text{im}\varphi = 2 - 2 = 0$, zatem $\ker \varphi = \{0\}$ i baza jest pusta.

3. Niech φ będzie jak wyżej. Rozstrzygnij, czy istnieje przekształcenie liniowe $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, takie, że $\varphi \circ \psi$ jest:

- a) monomorfizmem?
- b) izomorfizmem?
- c) epimorfizmem?

Odpowiedź uzasadnij, a w przypadku pozytywnej odpowiedzi wskaż przykład takiego przekształcenia ψ .

Mamy, że $\varphi \circ \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, więc nie może być epimorfizmem, ani izomorfizmem, bowiem $\dim \text{im}\varphi \circ \psi \leq 2 < 3$. Może być monomorfizmem. Wystarczy wziąć $\psi(x, y) = (x, y)$, wtedy $\varphi \circ \psi = \varphi$, a wymiar obrazu φ wynosi $2 = \dim \mathbb{R}^2$, więc jest monomorfizmem.

4. Znajdź przekształcenie liniowe $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, takie, że $\ker \phi = \text{lin}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ oraz $\text{im}\phi = \text{lin}((1, 1))$.

Skoro $((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ jest bazą $\mathbb{R}^4$, to mogę wziąć ϕ takie, że $\phi((1, 0, 0, 0)) = (1, 1)$ oraz $\phi((1, 1, 0, 0)) = (0, 0)$, $\phi((1, 0, 1, 0)) = (0, 0)$ i $\phi((1, 0, 0, 1)) = (0, 0)$. Zatem $\phi((0, 1, 0, 0)) = (-1, -1)$, $\phi((0, 0, 1, 0)) = (-1, -1)$ i $\phi((0, 0, 0, 1)) = (-1, -1)$, czyli

$$\phi((x, y, z, t)) = (x - y - z - t, x - y - z - t).$$

5. Niech ϕ będzie przekształceniem znalezionym w poprzednim zadaniu, zaś φ przekształceniem z pierwszego zadania. Znajdź wzór przekształcenie $\varphi \circ \phi$.

Mamy

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \phi)(x, y, z, t) &= \varphi((x - y - z - t, x - y - z - t)) = \\ &= (x - y - z - t, -(x - y - z - t) - 2(x - y - z - t), -2(x - y - z - t)) = \\ &= (x - y - z - t, -3x + 3y + 3z + 3t, -2x + 2y + 2z + 2t). \end{aligned}$$