

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

sprawdzian 2. – rozwiązania

20 grudnia 2019

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij!

Zadanie 1

Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^5$ rozpiętej na wektorach $(1, 1, -1, 2, 1)$, $(2, 2, -3, 5, 2)$, $(3, 3, -4, 7, 3)$. Następnie znaleźć układ równań jednorodnych opisujący tę podprzestrzeń.

Znajdujemy bazę:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 & 7 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem baza to $(1, 1, -1, 2, 1)$, $(0, 0, -1, 1, 0)$, a wymiar badanej podprzestrzeni to 2. Kontynuujemy tym razem rozwiązywanie układu równań na współczynniki szukanego układu równań:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem rozwiązanie ogólne to $a = -b - d - e$, $c = d$, czyli w postaci parametrycznej: $(-b - d - e, b, d, d, e)$. A zatem baza przestrzeni współczynników to $(-1, 1, 0, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$ a zatem odpowiadający jej szukany układ równań to:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z + t = 0 \\ -x + w = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2

Niech V będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

natomiast $W = \text{lin}((2, 0, 1, -4), (1, 3, 2, 4), (3, 3, 3, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $V+W$ oraz $V \cap W$.

Znajdźmy bazę przestrzeni V :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -14 & 14 & -14 & 0 \\ 0 & -13 & 13 & -13 & 0 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{w_2 \cdot (-1/14)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 13 & -13 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 4w_2, w_3 + 13w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem rozwiązanie ogólne to $(x_3 + x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4)$, czyli baza to $((1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1))$. I $\dim V = 2$.

Widać, że $\dim W = 2$, bowiem $(2, 0, 1, -4) = (3, 3, 3, 0) - (1, 3, 2, 4)$. Zatem $((1, 3, 2, 4), (1, 1, 1, 0))$ jest bazą W , bo jest liniowo niezależnym układem wektorów.

Zatem $V + W = \text{lin}((1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (1, 3, 2, 4), (1, 1, 1, 0))$, więc znajdziemy bazę:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1, w_4 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza $V + W$ to $((1, 1, 1, 0), (0, -2, -1, 1), (0, 0, 0, 5))$ oraz $\dim V + W = 3$.

W takim razie $\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 3 = 1$, i widzimy wektor, który jest jednocześnie w V i w W . Jest to $(1, 1, 1, 0)$, zatem baza $V \cap W$ to $((1, 1, 1, 0))$.

Zadanie 3

Niech $W = \{w \in \mathbb{R}[x] : \deg w < 6\}$, zaś $V = \{w \in W : w(2) = 0, w(1) = w(0)\}$.

a) Wykaż, że V jest podprzestrzenią przestrzeni W ,

b) Znajdź bazę i wymiar V ,

c) Znajdź taką podprzestrzeń $V' \subseteq W$, że $W = V \oplus V'$.

Rzeczywiście, jeśli $v, w \in V$, to $(v+w)(2) = v(2) + w(2) = 0 + 0 = 0$ oraz $(v+w)(1) = v(1) + w(1) = v(0) + w(0) = (v+w)(0)$, a także jeśli dodatkowo $a \in \mathbb{R}$, to $(av)(2) = av(2) = a \cdot 0 = 0$ oraz $(av)(1) = a \cdot v(1) = a \cdot v(0) = (av)(0)$, co dowodzi, że V jest podprzestrzenią liniową.

Jeśli $w \in V$, to niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$. Zatem nasze warunki dają, że $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 0$ oraz $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_0$, czyli mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy go:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 6 & 14 & 30 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(-2a_2 - 6a_3 - 14a_4 - 30a_5, -a_2 - a_3 - a_4 - a_5, a_3, a_4, a_5)$, a baza przestrzeni współczynników wielomianów z W to

$$(-2, -1, 1, 0, 0, 0), (-6, -1, 0, 1, 0, 0), (-14, -1, 0, 0, 1, 0), (-30, -1, 0, 0, 0, 1),$$

co odpowiada bazie V :

$$(x^2 - x - 2, x^3 - x - 6, x^4 - x - 14, x^5 - x - 30),$$

zatem $\dim V = 4$. Zauważmy, że

$$(x^2 - x - 2, x^3 - x - 6, x^4 - x - 14, x^5 - x - 30, 1, x)$$

jest bazą W . Rzeczywiście, z tych wielomianów możemy z łatwością skombinować dowolny wielomian stopnia < 6 , a ponadto jest to układ liniowo niezależny, bo to są wielomiany parami różnych stopni (powołujemy się tu na fakt udowodniony na ćwiczeniach). Skoro tak, to

$$V' = \text{lin}((x, 1)) = \{w \in \mathbb{R}[x] : \deg w < 2\}$$

spełnia warunki zadania.

Zadanie 4

Niech A, B, C będą podprzestrzeniami skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej V . Czy prawdą jest, że

$$\dim(A + B + C) = \dim A + \dim B + \dim C - \dim(A \cap B) - \dim(A \cap C) - \dim(B \cap C) + \dim(A \cap B \cap C)?$$

Udowodnij lub znajdź kontrprzykład.

Nie jest to prawda. Niech $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, $A = \text{lin}((1, 1))$, $B = \text{lin}((1, 0))$, $C = \text{lin}((0, 1))$. Wtedy $A + B + C = \mathbb{R}^2$, więc po lewej stronie równania mamy 2, natomiast $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C = \{\mathbf{0}\}$, więc po prawej stronie równania jest $1 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 + 0 = 3$.

Zadanie 5

Dane są w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń V_t rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + tx_4 = 0 \end{cases}$$

oraz $W_s = \text{lin}((1, 2, 1, 0), (1, 2s - 2, -1, s^2 - 1))$.

- znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni V_t w zależności od $t \in \mathbb{R}$.
- uzupełnij znalezioną bazę dla $t = 1$ do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
- oblicz w znalezionej bazie $\mathbb{R}^4$ współrzędne wektora $(2, 0, 1, 9)$
- dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$, $W_s \subseteq V_t$ (każdy wektor przestrzeni W_s jest w przestrzeni V_t)?
- a dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$, $W_s = V_t$?

A zatem zaczynamy od rozwiązania układu równań na V_t :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & t & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-4 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem w drugim wierszu mamy schodek tylko gdy $t \neq 4$. Czyli mam dwa przypadki:

- $t = 4$, to $\dim V_t = 3$ i baza to $(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)$
- $t \neq 4$, to $\dim V_t = 2$ i baza to $(-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)$.

Widać, że dodając do tej bazy wektory $(1, 0, 0, 0)$ oraz $(0, 0, 0, 1)$ dostajemy bazę $\mathbb{R}^4$. Zapisując wektory $(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ bardzo łatwo sprowadzić ją do postaci schodkowej i nie będzie tam wiersza zerowego.

Bardzo łatwo też wyliczyć odpowiednie współrzędne, więc: $(2, 0, 1, 9) = 3 \cdot (1, 0, 0, 0) + 0 \cdot (1, 1, 0, 0) + 1 \cdot (-1, 0, 1, 0) + 9 \cdot (0, 0, 0, 1)$ – czyli szukane współrzędne to $3, 0, 1, 9$.

Aby $V_t \subseteq W_s$, wektory W_s muszą spełniać równania na V_t . Z pierwszym wektorem nie ma problemu. Jeśli $t = 4$, to mamy tylko jedno równanie, z którego otrzymujemy, że $2s(s - 1) = 0$. Zatem w tym przypadku $s = 0$ lub $s = 1$. Jeśli $t \neq 4$, to dodatkowo $s^2 - 1 = 0$, czyli jedyna opcja to $s \in \{-1, 1\} \cap \{0, 1\}$, czyli $s = 1$.

Aby $V_t = W_s$, dodatkowo muszą się jeszcze zgadzać wymiary, co ma miejsce, wtedy i tylko wtedy gdy $t \neq 4 \wedge s = 1$, bo wtedy $\dim V_t = \dim W_s = 2$.