

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 22.

17 grudnia 2019

Zadania

- Niech $V = \text{lin}((1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0), (0, 1, -1, t))$ będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.
 - znajdź $\dim V$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$,
 - dla $t = 2$ podaj przykład bazy przestrzeni V .

- Niech

$$W = \{w \in \mathbb{R}[x]: \deg w < 5, w(-1) = 0, w'(1) = w''(0)\}.$$

Wykaż, że W jest przestrzenią liniową i znajdź jej bazę.

- Niech C będzie przestrzenią funkcji ciągłych $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Dla podprzestrzeni

$$A = \{f \in C: f(2) = 0, f(1) = f(3)\}$$

znajdź taką podprzestrzeń B , by $C = A \oplus B$.

- Zbadaj dla jakich wartości $r \in \mathbb{R}$,

$$(r, r, 1) \in \text{lin}((2, r, -r), (1, 2, -2)) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- Niech

$$V = \text{lin}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (1, 2, 2, 3)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Znajdź układ równań liniowych opisujących V .

- Niech A, B będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V . Udowodnij, że następujące warunki są równoważne.

- każdy wektor z przestrzeni $A+B$ daje się jednoznacznie zapisać jako suma wektora z A i wektora z B ,
- istnieje wektor z przestrzeni $A+B$, który daje się jednoznacznie zapisać jako suma wektora z A i wektora z B ,
- jeśli dla pewnych $\alpha \in A$, $\beta \in B$, zachodzi $\alpha + \beta = \mathbf{0}$, to $\alpha = \beta = \mathbf{0}$.
- $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$.

- Niech A, B będą podprzestrzeniami liniowymi skończonego wymiarowej przestrzeni V . Udowodnij, że

$$\dim A + \dim B - \dim V \leq \dim A \cap B \leq \dim A.$$

- Niech

$$A = \text{lin}((1, 2, 3, 4), (4, 1, 5, 2), (2, -3, -1, -6), (1, 1, 2, 2))$$

oraz

$$B = \text{lin}((1, 2, 1, 4), (0, 2, 2, 4), (2, 1, -1, 2))$$

będą podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$. Znajdź:

a) wymiar przestrzeni A ,

b) bazę przestrzeni $A \cap B$,

c) bazę przestrzeni $A + B$.

- Niech $A = \text{lin}((1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (2, 3, 4, 5)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Oblicz wymiar przestrzeni A , a następnie znajdź takie przestrzenie $B, C \subseteq \mathbb{R}^4$, że $\mathbb{R}^4 = A \oplus B = B \oplus C = C \oplus A$ lub wykaż, że takie przestrzenie nie istnieją.

Praca domowa

- Zbadaj dla jakich $t \in \mathbb{R}$, wektor $v = (0, 1, 5, 3, t) \in \mathbb{R}^5$ jest kombinacją liniową wektorów $(2, -1, 3, 4, 0)$, $(1, 1, 2, 2, -1)$ oraz $(3, -1, 0, 3, 2)$.

- Niech $W \neq V$ będzie podprzestrzenią V , zaś $\mathcal{B}$ liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V . Wykaż, że $\mathcal{B}$ można uzupełnić do bazy V wektorami z $V \setminus W$.

- Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4: x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.

a) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni W ,

b) Zbadaj, czy istnieje baza przestrzeni W zawierająca wektor $(1, 1, -1, 2)$ i jeśli tak, podaj przykład takiej bazy.

- Niech przestrzeń W będzie przestrzenią zadaną w poprzednim zadaniu, oraz niech $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną równaniem $x_3 - x_4 = 0$. Znajdź bazę oraz wymiar przestrzeni:

a) $V \cap W$,

b) $V + W$.

- Niech $W \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Znajdź podprzestrzeń A , taką, że $(1, 0, 0) \in A$ oraz $\mathbb{R}^3 = W \oplus A$.