

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 22. – rozwiązania zadań domowych

17 grudnia 2019

1. Zbadaj dla jakich $t \in \mathbb{R}$, wektor $v = (0, 1, 5, 3, t) \in \mathbb{R}^5$ jest kombinacją liniową wektorów $(2, -1, 3, 4, 0)$, $(1, 1, 2, 2, -1)$ oraz $(3, -1, 0, 3, 2)$.

Sprawdzamy, kiedy układ równań jest niesprzeczny.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & t \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - 2w_1, w_4 - 2w_1, w_5 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & t \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3, w_4 \cdot (-1/3)} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & t \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2, w_5 + 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & t + 10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot (1/14), w_4 \leftrightarrow w_5} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & t + 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 + 7w_3, w_5 - w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t + 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ten układ nie jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $t = -3$ i wtedy i tylko wtedy wektor $v = (0, 1, 5, 3, t) \in \mathbb{R}^5$ jest kombinacją liniową wektorów $(2, -1, 3, 4, 0)$, $(1, 1, 2, 2, -1)$ oraz $(3, -1, 0, 3, 2)$.

2. Niech $W \neq V$ będzie podprzestrzenią V , zaś $\mathcal{B}$ liniowo niezależnym układem wektorów przestrzeni V . Wykaż, że $\mathcal{B}$ można uzupełnić do bazy V wektorami z $V \setminus W$.

Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą W oraz $\mathcal{C}$ jej uzupełnieniem do bazy V . Skoro $V \neq W$, to $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Niech $v \in \mathcal{C}$, zatem $v \notin W$. Niech $\mathcal{A}' = \{w + v : w \in \mathcal{A}\}$. Zauważmy, że $\mathcal{A}' \cap W = \emptyset$. Także $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C}$ jest bazą V . Rzeczywiście dla każdego $w \in \mathcal{A}$, $w = (w + v) - v$ oraz $(w + v), v \in \mathcal{A}' \cup \mathcal{C}$. Podobnie, skoro $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ jest liniowo niezależnym układem wektorów, to i $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C}$ jest, bowiem z jednego do drugiego można przejść prostymi operacjami na wierszach macierzy.

Zatem $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C}$ jest bazą V oraz $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C} \subseteq V \setminus W$. Ale na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie, mogą $\mathcal{B}$ uzupełnić do bazy V wektorami z $\mathcal{A}' \cup \mathcal{C}$, co kończy dowód.

3. Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.

- a) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni W ,
 b) Zbadaj, czy istnieje baza przestrzeni W zawierająca wektor $(1, 1, -1, 2)$ i jeśli tak, podaj przykład takiej bazy.

Rozwiązujemy układ:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_2} \\
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to $(-x_2 + x_4, x_2, 3x_2 - 2x_4, x_4)$, a zatem baza W to $((-1, 1, 3, 0), (1, 0, -2, 1))$ oraz $\dim W = 2$.

Wektor $(1, 1, -1, 2) \in W$, ponieważ $1 - 2 - 1 + 2 = 0$ oraz $1 + 1 - 2 = 0$. Jest jasne, że na przykład $((1, 1, -1, 2), (-1, 1, 3, 0))$ jest bazą W , bo oba te wektory leżą w W , są liniowo niezależne i jest ich dwa, czyli tyle, co wymiar W .

4. Niech przestrzeń W będzie przestrzenią zadaną w poprzednim zadaniu, oraz niech $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną równaniem $x_3 - x_4 = 0$. Znajdź bazę oraz wymiar przestrzeni:

a) $V \cap W$,

Dodajemy dodatkowe równanie, czyli:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_2 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_2 \cdot (-1/3)} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to $(0, x_4, x_4, x_4)$, zatem baza $V \cap W$ to $((0, 1, 1, 1))$ oraz $\dim V \cap W = 1$.

b) $V + W$.

$\dim V = 4 - 1 = 3$, zatem $\dim V + W = 3 + 2 - 1 = 4$, zatem $V + W = \mathbb{R}^4$ oraz przykładowa baza to $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

5. Niech $W \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Znajdź podprzestrzeń A , taką, że $(1, 0, 0) \in A$ oraz $\mathbb{R}^3 = W \oplus A$.

Rozwiążmy układ równań:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 8w_2, w_3 + w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Czyli rozwiązanie ogólne to $(-19x_3, 2x_3, x_3)$, zatem baza W to $((-19, 2, 1))$. Zatem na przykład przestrzeń $A = \text{lin}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ spełnia warunki zadania. Rzeczywiście, $((1, 0, 0), (-19, 2, 1), (0, 0, 1))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$, więc $A + W = \mathbb{R}^3$ oraz $A \cap W = \{\mathbf{0}\}$.