

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 21.

13 grudnia 2019

1. Niech V, W będzie podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$. Znaleźć bazy i wymiary $V + W$ oraz $V \cap W$ dla
 - a) $V = \text{lin}((2, 1, 3, 4), (3, 9, 3, 9), (-1, 7, -3, 1))$,
 $W = \text{lin}((1, -3, 3, 0), (2, 5, 3, 5), (1, 8, 0, 5))$,
 - b) $V = \text{lin}((3, 2, 1, 0), (4, 3, 0, 2), (1, 2, 2, -3))$,
 natomiast W jest opisane układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$
2. Niech $V \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią rozwiązań równania $x + 2y - z = 0$, zaś

$$W = \text{lin}((2, -t + 2, 4), (2s, 6, -8)).$$
 Dla jakich wartości parametru $s, t \in \mathbb{R}$
 - a) $V \cap W = \{0\}$?
 - b) $V + W = \mathbb{R}^3$?
 - c) $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?
3. Dla każdej z poniższych podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ znaleźć podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^5$ taką, że $\mathbb{R}^5 = W \oplus V$.
 - a) $W = \text{lin}((1, 2, 4, 5, 1), (6, 9, 7, 5, 5), (4, 5, -1, -5, 3))$.
 - b) W jest przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}.$$
4. Dla każdej z poniższych podprzestrzeni W przestrzeni $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ znaleźć podprzestrzeń $W' \subseteq V$, że $V = W \oplus W'$.
 - a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$,
 - b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = f(2) = 0\}$,
5. Niech K będzie ciałem oraz $n \in \mathbb{N}$ i niech $V = M_{n \times n}(K)$. Rozpatrzmy następujące podzbiory w V . Niech

$$W_1 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i > j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_2 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \geq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_3 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i < j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_4 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \leq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_5 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \neq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_6 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i,j} a_{ij} = a_{ji}\},$$

$$W_7 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i,j} a_{ij} = -a_{ji}\}.$$
 Wykazać, że podzbiory te są podprzestrzeniami liniowymi V . Znaleźć wszystkie takie pary i, j , że $V = W_i \oplus W_j$.
6. Niech V będzie przestrzenią liniową oraz $V = W \oplus W'$. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni W , a $\mathcal{A}'$ bazą przestrzeni W' . Udowodnij, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ jest bazą przestrzeni V .
7. Niech $V = \text{lin}((1, 2, 3, 1), (2, 1, 2, 3), (3, 3, 5, 4), (3, 0, 1, 5))$ oraz

$$W = \text{lin}((1, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$
 Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni V , W , $V + W$ i $V \cap W$.
8. Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów spełniających równanie:
 - a) $x + y + z + t = 0$?
 - b) $x + y + z + t = 1$?