

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 21. – rozwiązania

13 grudnia 2019

1. Niech V, W będzie podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$. Znaleźć bazy i wymiary $V + W$ oraz $V \cap W$ dla

a) $V = \text{lin}((2, 1, 3, 4), (3, 9, 3, 9), (-1, 7, -3, 1))$, $W = \text{lin}((1, -3, 3, 0), (2, 5, 3, 5), (1, 8, 0, 5))$,
Znajdujemy bazy tych przestrzeni:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 3 & 9 \\ -1 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot (1/3)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem baza V to $((1, 8, 0, 5), (0, -5, 1, -2))$.

W drugim przypadku:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_1 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem baza W to $((1, 8, 0, 5), (0, 11, -3, 5))$. W obu bazach pierwszy wektor jest taki sam, ale pozostałe dwa są liniowo niezależne. W takim razie baza $V + W$ to $((1, 8, 0, 5), (0, 11, -3, 5), (0, -5, 1, -2))$. Wobec tego $\dim V + W = 3$, a zatem $\dim V \cap W = -\dim(V + W) + \dim V + \dim W = -3 + 2 + 2 = 1$. Zatem szukamy jednego niezerowego wektora, który jest zarówno w V , jak i w W . Jest to właśnie $(1, 8, 0, 5)$ – i to jest baza $V \cap W$.

b) $V = \text{lin}((3, 2, 1, 0), (4, 3, 0, 2), (1, 2, 2, -3))$, natomiast W jest opisane układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Opiszmy układem równań także przestrzeń V :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 3w_1} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_2, w_3 - 4w_2} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot (1/7)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 4w_3, w_2 - 3w_3} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -11/7 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem baza przestrzeni współczynników to $(-5, 2, 11, 7)$ i V opisane jest równaniem:

$$-5x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 0.$$

Przy okazji zauważmy, że $\dim V = 3$.

Zatem $V \cap W$ jest opisane układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

który rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 5 & 0 \\ -5 & 2 & 11 & 7 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 - 3w_1, w_3 + 5w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 12 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_2, w_3 + 12w_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 36 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_3 \cdot (1/54)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 7w_3, w_2 + 4w_3} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem baza $V \cap W$ to $(-1, -2, -2, 3)$ oraz $\dim(V \cap W) = 1$. Zatem $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$, czyli $V + W = \mathbb{R}^4$, zatem baza tej przestrzeni to na przykład $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

2. Niech $V \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie przestrzenią rozwiązań równania $x + 2y - z = 0$, zaś

$$W = \text{lin}((2, -t + 2, 4), (2s, 6, -8)).$$

Dla jakich wartości parametru $s, t \in \mathbb{R}$

- a) $V \cap W = \{0\}$?

Wtedy żaden z wektorów rozpinających W nie może leżeć na V , zatem $\dim V + W = 3$. Ale też $0 = \dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + \dim W - 3$, czyli $\dim W = 1$, zatem wektory $(2, -t + 2, 4), (2s, 6, -8)$ muszą być liniowo zależne, co stanie się wtedy i tylko wtedy, gdy $s = -2, t = 5$. Wtedy też oczywiście dowolna ich niezerowa kombinacja nie spełnia równania na V .

- b) $V + W = \mathbb{R}^3$?

Skoro $\dim V = 2$, niezbędne jest, żeby co najmniej jeden z tych wektorów nie spełniał równań. Czyli $t \neq 1$ lub $s \neq -4$.

- c) $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?

Znów, zachodzi to wtedy, gdy poprzednie dwie rzeczy zachodzą naraz, czyli gdy $s = -2, t = 5$.

3. Dla każdej z poniższych podprzestrzeni $W \subseteq \mathbb{R}^5$ znaleźć podprzestrzeń $V \subseteq \mathbb{R}^5$ taką, że $\mathbb{R}^5 = W \oplus V$.

- a) $W = \text{lin}((1, 2, 4, 5, 1), (6, 9, 7, 5, 5), (4, 5, -1, -5, 3))$.

Znajdujemy bazę W :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 7 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & -5 & 3 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 - 6w_1, w_3 - 4w_1} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -17 & -25 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -17 & -25 & -1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -17 & -25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A zatem wystarczy wziąć $V = \text{lin}((0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$.

b) W jest przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy ten układ równań (wystarczy, że dowiemy się które zmienne będą parametrami w rozwiązaniu ogólnym), zapisuję układ w kolejności x_5, x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_1, w_3 + 4w_1} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 24 & -9 & 13 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 10 & -10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem wystarczy wziąć te wektory z bazy standardowej, które mają jedynki w miejscu bazowych zmiennych, czyli $V = \text{lin}((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$.

4. Dla każdej z poniższych podprzestrzeni W przestrzeni $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ znaleźć podprzestrzeń $W' \subseteq V$, że $V = W \oplus W'$.

a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = 0\}$,

Niech $W' = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall_{x \neq 0} f(x) = 0\}$. Łatwo sprawdzić, że spełnia postawione warunki.

b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = f(2) = 0\}$,

Niech $W' = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}} f(x) = 0\}$. Łatwo sprawdzić, że spełnia postawione warunki.

5. Niech K będzie ciałem oraz $n \in \mathbb{N}$ i niech $V = M_{n \times n}(K)$. Rozpatrzmy następujące podzbiory w V . Niech

$$W_1 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i > j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_2 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \geq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_3 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i < j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_4 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \leq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_5 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i \neq j} a_{ij} = 0\},$$

$$W_6 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i, j} a_{ij} = a_{ji}\},$$

$$W_7 = \{[a_{ij}] \in M_{n \times n}(K) : \forall_{i, j} a_{ij} = -a_{ji}\}.$$

Wykazać, że podzbiory te są podprzestrzeniami liniowymi V . Znaleźć wszystkie takie pary i, j , że $V = W_i \oplus W_j$.

Te zbiory są podprzestrzeniami liniowymi ze względu na to, że dodawanie macierzy i mnożenie macierzy przez liczbę odbywa się po wyrazach.

Mamy $V = W_1 \oplus W_4 = W_2 \oplus W_3 = W_6 \oplus W_7$.

6. Niech V będzie przestrzenią liniową oraz $V = W \oplus W'$. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą przestrzeni W , a $\mathcal{A}'$ bazą przestrzeni W' . Udowodnij, że $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ jest bazą przestrzeni V .

Jeśli $v \in V$, to $v = w + w'$, ale w jest kombinacją wektorów z $\mathcal{A}$, a w' jest kombinacją wektorów z $\mathcal{A}'$, więc V jest rozpinana przez $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Tymczasem $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ jest liniowo niezależne, bowiem gdyby dla nie wszystkich zerowych współczynników kombinacja liniowa takich wektorów dawałaby 0, to po przeniesieniu części tej kombinacji związanej z $\mathcal{A}'$ na drugą stronę równania, dostajemy, że $\text{lin}(\mathcal{A}) \cap \text{lin}(\mathcal{A}') \neq \{0\}$, co nie jest prawdą.

7. Niech $V = \text{lin}((1, 2, 3, 1), (2, 1, 2, 3), (3, 3, 5, 4), (3, 0, 1, 5))$ oraz

$$W = \text{lin}((1, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)).$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni V , W , $V + W$ i $V \cap W$.

Sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1, w_4 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza V to $((1, 2, 3, 1), (0, -3, -4, 1))$ i jest to przestrzeń wymiaru 2. Tymczasem baza W to $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ i jej wymiar to 3. Widać, że przestrzeń W to przestrzeń rozwiązań równania $x_3 = x_4$. Sprawdzamy, jakie kombinacje wektorów z bazy V spełniają to równanie i otrzymujemy, że $V \cap W = \text{lin}((5, 4, 7, 7))$ jest jednowymiarowa, natomiast $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4$, więc $V + W = \mathbb{R}^4$ jest czterowymiarowa, więc baza $V + W$ to

$$((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

8. Czy można znaleźć bazę przestrzeni K^4 złożoną z wektorów spełniających równanie:

a) $x + y + z + t = 0$?

Nie, ponieważ kombinacja liniowa wektorów spełniających to równanie spełnia to równanie, a wektor $(1, 0, 0, 0) \in K^4$ nie spełnia tego równania.

b) $x + y + z + t = 1$?

Tak, $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ jest taką bazą.