

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej,
2020/2021

spotkanie 7. Wprowadzenie do teorii grafów

3 grudnia 2020

1. Udowodnij, że na każdym przyjęciu są dwie osoby o takiej samej liczbie znajomych.
2. Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów G i dopełnienie G jest spójny.
3. Podaj przykład grafu, w którym
 - a) istnieje cykl Eulera i Hamiltona
 - b) istnieje cykl Eulera ale nie Hamiltona
 - c) istnieje cykl Hamiltona, ale nie Eulera
 - d) nie istnieje ani cykl Eulera i ani Hamiltona
4. Udowodnij, że liczba Ramseya dla $k = 2$ i $n = 3$ wynosi 6.
5. Rozstrzygnij, czy istnieje:
 - a) graf o stopniach wierzchołków 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6.
 - b) graf o stopniach wierzchołków 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6.
 - c) graf dwudzielny o stopniach wierzchołków 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6.
 - d) drzewo o dowolnym ciągu stopni długości n i sumie $2n - 2$.
6. Udowodnij, że jeśli w spójnym grafie jest $k > 0$ wierzchołków o stopniu nieparzystym to k jest parzyste oraz $k/2$ to najmniejsza możliwa liczba krawędziowo rozłącznych łańcuchów pokrywających wszystkie krawędzie.
7. Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów o takim samym ciągu stopni wierzchołków.
8. Z kompletu 28 kostek domina (pary od 0-0 do 6-6) usunięto kostki 0-1, 0-2 i 0-3. Ile jeszcze kostek domina trzeba usunąć, aby z pozostałych stworzyć zamknięty łańcuch kostek.
9. Które pełne grafy dwudzielne i trójdzielne są eulerowskie, a które hamiltonowskie?
10. Udowodnij, że graf prosty o k spójnych składowych spełnia
$$|V| - k \leq |E| \leq \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$
11. Pokaż, że tych oszacowań nie da się poprawić.
12. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:
 - a) T jest drzewem,
 - b) T nie ma cykli i ma $|V| - 1$ krawędzi,
 - c) T jest spójny i ma $|V| - 1$ krawędzi,
 - d) T jest spójny, a usunięcie jednej krawędzi tworzy dwie spójne składowe,
 - e) dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą,
 - f) T nie zawiera cykli lecz dodanie nowej krawędzi tworzy cykl.
13. Udowodnij, że każdy las o k spójnych składowych ma $|V| - k$ krawędzi.