

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej,
2020/2021
spotkanie 7. Wprowadzenie do teorii grafów

3 grudnia 2020

1. Udowodnij, że na każdym przyjęciu są dwie osoby o takiej samej liczbie znajomych.

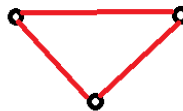
Założmy przeciwnie. Zatem jest co najwyżej jedna osoba, która nie zna nikogo. Bez straty ogólności możemy zatem usunąć ją z rozważań. Jeśli rozważymy znajomości na przyjęciu jako graf, to możliwe stopnie wierzchołków wahają się od 1 do $n - 1$. Za to wierzchołków jest n – zatem z zasady szufladkowej Dirichleta, pewne dwa wierzchołki są tego samego rzędu – sprzeczność.

2. Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów G i dopełnienie G jest spójny.

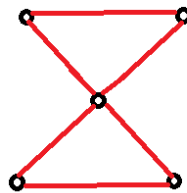
Założmy przeciwnie, że każdy z nich nie jest spójny. Zatem $V = V_1 \cup V_2 = W_1 \cup W_2$ oraz pomiędzy wierzchołkami z V_1 i V_2 nie ma żadnych krawędzi, natomiast pomiędzy wierzchołkami z W_1 i W_2 są wszystkie oraz wszystkie te zbiory są niepuste. Bez straty ogólności założmy, że istnieje $v \in V_1 \cap W_1$. Wtedy, jeśli $w \in V_2$, to $w \in W_1$. Z drugiej strony, jeśli $w' \in W_2$ to $w' \in V_1$. Zatem $V_2 = W_1$, $V_1 = W_2$, sprzeczność.

3. Podaj przykład grafu, w którym

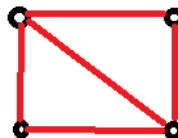
- a) istnieje cykl Eulera i Hamiltona



- b) istnieje cykl Eulera ale nie Hamiltona



- c) istnieje cykl Hamiltona, ale nie Eulera

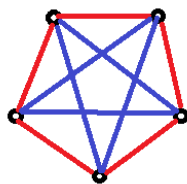


- d) nie istnieje ani cykl Eulera i ani Hamiltona



4. Udowodnij, że liczba Ramseya dla $k = 2$ i $n = 3$ wynosi 6.

Rzeczywiście jest złe pokolorowanie klikki K_5 .



W K_6 już znajdziemy jakąś jednokolorową trójkąt, bo z każdego wierzchołka wychodzi 5 krawędzi. Ustalmy wierzchołek v . Zatem trzy z tych dwóch krawędzi są jednego koloru, bez straty ogólności czerwone. Idą do wierzchołków x, y, z . Ale jeśli wszystkie krawędzie pomiędzy x, y i z są niebieskie, stanowią trójkąt. Załóżmy więc przeciwnie, że jedna z nich, bez straty ogólności x, y jest czerwona. Ale wtedy v, x, y jest czerwonym trójkątem.

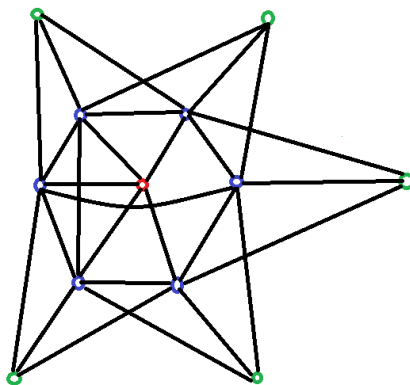
5. Rozstrzygnij, czy istnieje:

- a) graf o stopniach wierzchołków 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

Nie, bo suma stopni musi być parzysta, bo to 2 razy liczba krawędzi.

- b) graf o stopniach wierzchołków 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

Tak,



- c) graf dwudzielny o stopniach wierzchołków 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

Po każdej stronie grafu musi wychodzić 28 krawędzi i po każdej stronie grafu musi być 6 wierzchołków. Ale dowolne 6 z tych liczb nie sumuje się do 28. Więc nie.

- d) drzewo o dowolnym ciągu stopni długości n i sumie $2n - 2$.

Tak, to po prostu ciąg n wierzchołków, z których każdy jest połączony krawędzią z następnym.

6. Udowodnij, że jeśli w spójnym grafie jest $k > 0$ wierzchołków o stopniu nieparzystym to k jest parzyste oraz $k/2$ to najmniejsza możliwa liczba krawędziowo rozłącznych łańcuchów pokrywających wszystkie krawędzie.

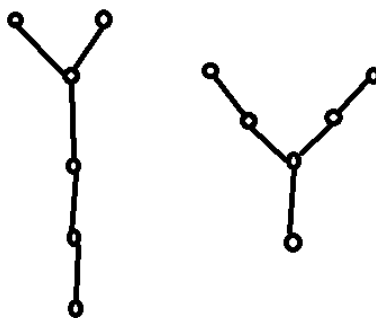
Pierwsza teza jest jasna, skoro suma stopni wszystkich wierzchołków musi być zawsze parzysta (to dwa razy liczba krawędzi). Drugą tezę dowodzimy przez indukcję dla k (parzystych).

Dla $k = 2$ to po prostu tw. Eulera – istnieje ścieżka Eulera i pokrywa ona wszystkie krawędzie.

Założmy, że teza jest prawdziwa dla każdego $k < n$ oraz niech w naszym grafie będzie $k > 0$ wierzchołków o stopniu nieparzystym. Wybierzmy dwa takie wierzchołki i ścieżkę pomiędzy nimi (istnieje, bo graf był spójny). Usuńmy tę ścieżkę z grafu. Jeśli jakaś powstała spójna składowa nie ma wierzchołków o stopniu nieparzystym uzupełniamy naszą ścieżkę o cykl Eulera w tej składowej i także usuwamy. Zauważmy, że liczba wierzchołków o stopniach nieparzystych zmalała o 2, więc z założenia indukcyjnego w sumie z poszczególnych spójnych składowych wystarczy nam $(k - 2)/2$ łańcuchów. W sumie z tym usuniętym jest ich $k/2$.

Zauważmy też, że potrzeba ich co najmniej $k/2$, bo każdy wierzchołek o stopniu nieparzystym musi leżeć na końcu co najmniej jednego takiego łańcucha.

7. Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów o takim samym ciągu stopni wierzchołków.



8. Z kompletu 28 kostek domina (pary od 0–0 do 6–6) usunięto kostki 0–1, 0–2 i 0–3. Ile jeszcze kostek domina trzeba usunąć, aby z pozostałych stworzyć zamknięty łańcuch kostek.

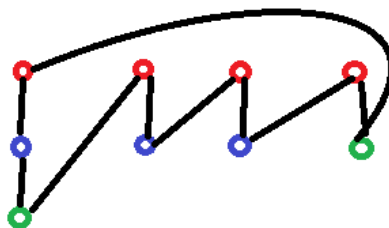
Możemy myśleć o kostkach jako o krawędziach grafu o wierzchołkach 0, 1, 2, 4, 5, 6 oraz zignorować kostki o tym samym numerze, bo one zawsze dadzą się wstawić. Zatem po usunięciu stopnie wierzchołków to odpowiednio 3, 5, 5, 5, 6, 6. Usuwając jeszcze kostki 0–4, 1–2, 3–4 dostajemy 2, 4, 4, 4, 4, 6 – wszystkie stopnie są parzyste, więc istnieje cykl Eulera, który jest poszukiwanym przez nas zamkniętym łańcuchem kostek.

9. Które pełne grafy dwudzielne i trójdzielne są eulerowskie, a które hamiltonowskie?

Eulerowskie są te, co stopień każdego wierzchołka jest parzysty na co w przypadku grafów dwudzielnych potrzeba i wystarcza, że obie grupy wierzchołków mają ich parzyste wiele. W przypadku grafów trójdzielnych wszystkie trzy muszą mieć parzyste wiele wierzchołków lub wszystkie trzy nieparzyste wiele.

W przypadku grafów dwudzielnych hamiltonowskich, te dwie grupy wierzchołków muszą być równoliczne, bo w cyklu Hamiltona będę je odwiedzać naprzemiennie. Jeśli ten warunek jest spełniony, to cykl Hamiltona istnieje – odwiedzam zawsze pierwszy nieodwiedzony jeszcze w przeciwnej grupie, a na koniec wracam do wierzchołka startowego.

Każdy graf trójdzielny jest hamiltonowski o ile jedna grupa nie ma więcej wierzchołków niż suma dwóch pozostałych. Rzeczywiście, skoro dwa wierzchołki w jednej grupie nigdy nie będą odwiedzone bezpośrednio po sobie, to ten warunek musi być spełniony. Narysujmy zatem wierzchołki grafu w trzech rzędach – w pierwszym największej grupy. W drugim drugiej co do wielkości grupy i dopełnijmy wierzchołkami trzeciej grupy. W trzecim – resztę wierzchołków trzeciej grupy, od lewej strony – ten rząd może nie być pełny (może być nawet pusty). Wtedy cykle Hamiltona przedstawia poniższy obrazek – przechodzi kolejnymi kolumnami tych trzech wierszy.



10. Udowodnij, że graf prosty o k spójnych składowych spełnia

$$|V| - k \leq |E| \leq \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}.$$

Rzeczywiście, mając $|V|$ wierzchołków bez krawędzi mamy $|V|$ spójnych składowych. Pozbycie się jednej, wymaga narysowania jednej krawędzi, więc, żeby składowych mieć k , trzeba narysować co najmniej $|V| - k$ krawędzi.

Dla każdego wierzchołka istnieje co najmniej $k - 1$ wierzchołków do których nie ma na pewno z niego krawędzi. Odliczając jego samego z pierwszego wierzchołka, mogę narysować krawędź na co najwyżej $|V - k|$ sposobów. Z drugiego, nie licząc już policzonej krawędzi do pierwszego wierzchołka na $|V - k - 1|$ sposobów. Zatem licząc krawędzie w ten sposób możemy się doliczyć co najwyżej:

$$(|V| - k) + (|V| - k - 1) + \dots + 1 = \frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}$$

krawędzi.

11. Pokaż, że tych oszacowań nie da się poprawić.

Rzeczywiście, graf, w którym połączono pierwszy wierzchołek z $|V| - k$ innymi i nic więcej ma jedną dużą składową złożoną z $|V| - k + 1$ punktów i poza tym $k - 1$ samotnych wierzchołków, które tworzą swoje składowe. Zatem tych składowych jest k .

Graf, który składa się z kilki o $|V| - k + 1$ wierzchołkach, a poza tym $k - 1$ samotnych wierzchołków ma k składowych oraz $\frac{(|V| - k)(|V| - k + 1)}{2}$ krawędzi.

12. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

- T jest drzewem,
- T nie ma cykli i ma $|V| - 1$ krawędzi,
- T jest spójny i ma $|V| - 1$ krawędzi,
- T jest spójny, a usunięcie jednej krawędzi tworzy dwie spójne składowe,
- dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą,
- T nie zawiera cykli lecz dodanie nowej krawędzi tworzy cykl.

$a \rightarrow b$: skoro jest drzewem to nie ma cykli, skoro jest spójny, to zawiera co najmniej $|V| - 1$ krawędzi. Przez indukcję dowodzimy, że jest ich dokładnie $|V| - 1$. Rzeczywiście, usunięcie jednej krawędzi rozspójnia drzewo na dwa drzewa o mniejszej liczbie wierzchołków n i m , które z założenia indukcyjnego mają $n - 1$ i $m - 1$ krawędzi. Zatem całe drzewo ma $n - 1 + m - 1 + 1 = n + m - 1 = |V| - 1$ krawędzi.

$b \rightarrow c$: gdyby nie był spójny, składałby się ze spójnych składowych, ale skoro nie ma w nich cykli to podobne rozumowanie, co w poprzednim punkcie pokazuje, że krawędzi w każdej spójnej składowej jest o jedną mniej niż wierzchołków, sprzeczność.

$c \rightarrow d$: usunięcie dowolnej krawędzi powoduje, że będzie $|V| - 2$ krawędzi, więc na mocy poprzedniego zadania, nowy graf będzie się składał z więcej niż jednej spójnej składowej.

$d \rightarrow e$: załóżmy przeciwnie, że są dwie różne ścieżki pomiędzy v i w . Wtedy usunięcie krawędzi będącej tylko na jednej z nich nie rozspójnia grafu, sprzeczność.

$e \rightarrow f$: skoro jest zawsze dokładnie jedna droga, to nie może być cyklu, bo on automatycznie daje dwie drogi. Skoro jednak każde dwa wierzchołki już są połączone drogą to dodanie nowej krawędzi tworzy drugą drogę pomiędzy tymi wierzchołkami domykając cykl.

$f \rightarrow a$: gdyby graf nie był spójny, to dodanie nowej krawędzi pomiędzy wierzchołkami z dwóch różnych spójnych składowych nie tworzyłoby cyklu. Więc jest spójny, a skoro nie ma cykli, jest drzewem.

13. Udowodnij, że każdy las o k spójnych składowych ma $|V| - k$ krawędzi.

Niech ten las składa się ze spójnych składowych (drzew) o liczbie wierzchołków $n_1, n_2, \dots, n_k$. Na podstawie poprzedniego zadania, liczba krawędzi w i -tym drzewie to $n_i - 1$ (patrz poprzednie zadanie). Zatem cały las ma $n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 = n_1 + \dots + n_k - k = |V| - k$ wierzchołków.