

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

sprawdzian – rozwiązania

12 listopada 2019

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij!

Zadanie 1

Niech $A_{n,m} = [n, n+1 + \sin(\frac{m\pi}{2})] \subseteq \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Oblicz:

- a) $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,2019}$,
- b) $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m}$,

Rozwiązanie:

- a) Twierdzę, że $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,2019} = \mathbb{N}$. Rzeczywiście, $\sin \frac{2019\pi}{2} = -1$, więc $[n, n+1 + \sin(\frac{m\pi}{2})] = \{n\}$. A zatem $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,2019} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N}$.
- b) Niech $B_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m}$. Twierdzę, że $B_n = [n, n+2]$. Rzeczywiście, jeśli $m = 2k$, to $\sin \frac{m\pi}{2} = 0$, więc $A_{n,m} = [n, n+1]$. Jeśli $m = 4k+1$, to $\sin \frac{m\pi}{2} = 1$, więc $A_{n,m} = [n, n+2]$, zaś jeśli $m = 4k+3$, to $\sin \frac{m\pi}{2} = -1$, więc $A_{n,m} = \{n\}$. Zatem $B_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m} = [n, n+1] \cup [n, n+2] \cup \{n\} = [n, n+2]$.
A zatem $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m} = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} [n, n+2] = \emptyset$, bowiem, $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} [n, n+2] \subseteq [0, 2] \cap [3, 5] = \emptyset$.

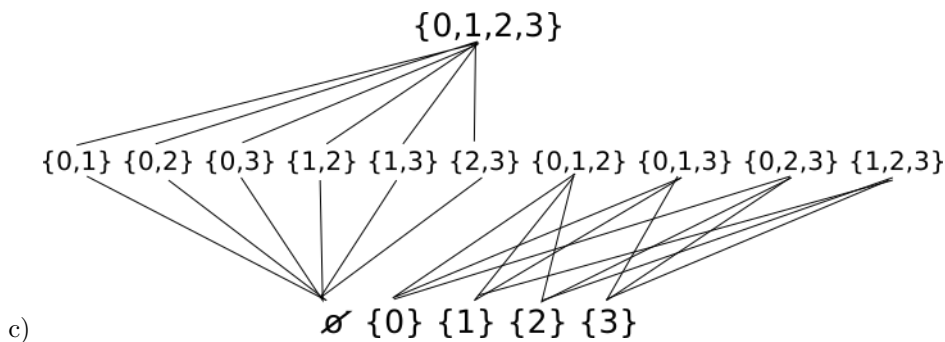
Zadanie 2

Niech $\sqsubseteq$ będzie relacją zadaną na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, w taki sposób, że $A \sqsubseteq B$, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \setminus A$ jest skończonym zbiorem o parzystej liczbie elementów.

- a) Udowodnij, że $\sqsubseteq$ jest porządkiem częściowym na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- b) Czy ten porządek jest liniowy? Czy jest gęsty?
- c) Narysuj diagram Hassego porządku $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\}), \sqsubseteq$. Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze (o ile istnieją).

Rozwiązanie:

- a) Jest zwrotny, bo dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \subseteq A$ oraz $A \setminus A = \emptyset$ jest zbiorem skończonym o zerowej, więc parzystej liczbie elementów, więc $A \sqsubseteq A$. Jest antysymetryczny, bowiem jeśli $A \sqsubseteq B$ oraz $B \sqsubseteq A$ to w szczególności $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$, więc $A = B$. Jest przechodni, bowiem $A \sqsubseteq B$ oraz $B \sqsubseteq C$ to $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq C$, więc $A \subseteq C$. Co więcej $B \setminus A$ oraz $C \setminus B$ są skończone i parzystej mocy. Zauważ, że, w związku z tym, że $A \subseteq B \subseteq C$, to $A \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ jest też skończony i o parzystej mocy.
- b) Nie jest to porządek liniowy, bo np. $\{1\} \not\sqsubseteq \{2\}$, ani $\{2\} \not\sqsubseteq \{1\}$. Nie jest też gęsty, bo nie istnieje żaden podzbiór pomiędzy $\emptyset \sqsubseteq \{0, 1\}$, bowiem jeśli $\emptyset \sqsubseteq A \subseteq \{0, 1\}$, to $A \subseteq \{0, 1\}$, ale musi się różnić parzystą liczbą elementów od $\emptyset$, więc $A = \emptyset$ lub $A = \{0, 1\}$.



c)

Elementy minimalne: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$, zatem nie ma elementu najmniejszego.

Elementy maksymalne: $\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$, zatem nie ma elementu największego.

Zadanie 3

Niech relacja $\sim$ na zbiorze $\mathbb{R}$ będzie zadana następująco $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists z \in \mathbb{Z} x - y = z\pi$.

- Podaj przykład dwóch różnych liczb, które pozostają ze sobą w tej relacji oraz dwóch liczb, które nie mają tej właściwości.
- Sprawdź, że $\sim$ jest relacją równoważności.
- Oblicz $[2020\pi]_{\sim}$.
- Oblicz moc zbioru ilorazowego.
- Oblicz moc poszczególnych klas abstrakcji.

Rozwiązanie:

- $0 \sim \pi$, bowiem $0 - \pi = (-1)\pi$ i $-1 \in \mathbb{Z}$. Natomiast $1 \not\sim 0$, bowiem $1 - 0 = 1$ nie jest całkowitą wielokrotnością π .
- Jest zwrotna, bo dla każdej liczby x , $x - x = 0 = 0\pi$, więc $x \sim x$. Jest symetryczna, bowiem jeśli $a \sim b$, to istnieje $z \in \mathbb{Z}$, że $a - b = z\pi$, czyli $b - a = (-z)\pi$ oraz $-z \in \mathbb{Z}$, a zatem $b \sim a$. Jest też przechodnia, bo jeśli $a \sim b$ i $b \sim c$, to istnieją $z, t \in \mathbb{Z}$, że $a - b = z\pi$ oraz $b - c = t\pi$. Zatem $a - c = (z + t)\pi$ oraz oczywiście $z + t \in \mathbb{Z}$, a zatem $a \sim c$.
- Oczywiście $[2016\pi]_{\sim} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim 2016\pi\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{Z} x - 2016\pi = z\pi\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{Z} x = (z + 2016)\pi\} = \{z\pi : z \in \mathbb{Z}\}$.
- Zauważ, że jeśli $a, b \in [0, \pi)$ oraz $a \neq b$, to $a \not\sim b$, a zatem $[a]_{\sim} \neq [b]_{\sim}$. A zatem funkcja $f: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ zadana $f(a) = [a]_{\sim}$ jest różnowartościowa, a zatem $|\mathbb{R}/\sim| \geq \mathfrak{c}$, ale ponieważ $|\mathbb{R}/\sim| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, to z Tw. Cantora-Bernsteina, $|\mathbb{R}/\sim| = \mathfrak{c}$.
- Niech $a \in \mathbb{R}$. Wiemy, że $[a]_{\sim} = \{a + z\pi : z \in \mathbb{Z}\}$, a zatem funkcja $g: \mathbb{Z} \rightarrow [a]_{\sim}$ zadana wzorem $g(z) = a + z\pi$ jest bijekcją. A zatem dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$, $|[a]_{\sim}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Zadanie 4

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

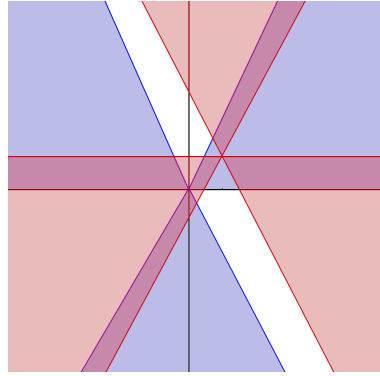
$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz^3) < 0\}$$

oraz zbiór

$$B = \{z + 1 + i \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}.$$

Mamy $\operatorname{Re} x < 0$, gdy $\arg x \in (\pi/2, 3\pi/2)$, zatem $\operatorname{Re}(iy) < 0$, gdy $\arg y \in (0, \pi)$, zatem $z \in A$, gdy $\arg z = (0, \pi/3) \cup (2\pi/3, \pi) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)$ (niebieski).

Oraz gdy $\bar{z} \in A$, to $\arg z \in (-\pi/3, 0) \cup (\pi, 4\pi/3) \cup (\pi/3, 2\pi/3)$. Ten zbiór przesuwamy o $1 + i$ (jeden w prawo i w górę), by dostać zbiór A (czerwony).



Zadanie 5

Znajdź wszystkie liczby zespolone z takie, że $z^6 + 64i = 0$.

Czyli $z^6 = -64i$, a $|z| = 64$, zatem moduł szukanych liczb to 2, natomiast $\arg z = \frac{3\pi}{2}$, zatem moduły szukanych liczb to $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$. Zatem te liczby to: $2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, 2e^{7\pi i/12}, 2e^{11\pi i/12}, 2e^{5\pi i/4} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, 2e^{19\pi i/12}, 2e^{23\pi i/12}$.