

# Algebra dla MSEM I, 2019/2020

## ćwiczenia 20.

10 grudnia 2019

### Zadania

1. Wykazać, że rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ma rząd 2 wtedy i tylko wtedy, gdy  $ad - bc \neq 0$ .

2. Wykazać, że jeśli  $A = [a_{ij}] \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  jest niezerową macierzą taką, że  $a_{ij} = -a_{ji}$ , to  $r(A) = 2$ .
3. Niech bazą  $V$  będzie  $(1, -1, 1, 1, -2)$ ,  $(4, 4, -4, -4, 0)$ ,  $(3, 1, 3, -1, 3)$ , zaś bazą  $W$  wektory  $(-1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 0, 0, 1)$ . Uzupełnić bazę przestrzeni  $V$  do bazy całej przestrzeni  $\mathbb{R}^5$  korzystając z wektorów z  $W$ .
4. Opisać układem równań liniowych przestrzeń  $\text{lin}((-9, 3, 6, -3), (-4, 2, 1, 5), (-5, 5, 4, 3))$ .
5. Znaleźć wymiar podprzestrzeni przestrzeni  $K[x]$  złożonej z wszystkich wielomianów stopnia mniejszego od 6 podzielnych przez  $x - 1$ .
6. Niech układ  $\{v_1, \dots, v_n\}$  będzie bazą przestrzeni liniowej  $V$ . Niech  $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ . Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Układ  $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$  jest bazą  $V$ ,
- (ii)  $w \in \text{lin}(v_1 + w, \dots, v_n + w)$ ,
- (iii)  $\sum_{i=1}^n a_i \neq -1$ .

7. Niech  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  z naturalnym dodawaniem będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  z mnożeniem  $\circ$ . Wiedząc, że  $\sqrt{3} \circ 1 = 2 + \sqrt{5}$ , wylicz  $\sqrt{3} \circ \sqrt{5}$ .
8. Zilustruj twierdzenie Steinitza o wymianie na przykładzie bazy standardowej  $\mathbb{R}^4$  oraz układu wektorów  $((-2, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 3))$ .
9. Niech  $K$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  wszystkich funkcji  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ze standardowymi działaniami.

- a) Czy zbiór  $A \subseteq K$  wszystkich funkcji parzystych jest podprzestrzenią liniową?
- b) Czy zbiór  $B \subseteq K$  wszystkich funkcji nieparzystych jest podprzestrzenią liniową?
- c) Opisz  $A \cap B$ .
- d) Udowodnij, że każdą funkcję  $f \in K$  można jednoznacznie zapisać jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.

e) Czy zbiór  $C \subseteq K$  wszystkich funkcji okresowych jest podprzestrzenią liniową?

f) Czy zbiór  $F \subseteq K$  wszystkich funkcji o okresie będącym liczbą wymierną jest podprzestrzenią liniową?

g) Opisz  $F \cap \mathbb{Q}[x]$ .

10. Niech  $W = \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$  będzie podprzestrzenią przestrzeni  $V$ . Udowodnij, że  $\dim W = n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v_1, \dots, v_n$  jest bazą przestrzeni  $W$ .

### Zadania domowe

1. Niech  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  z naturalnym dodawaniem będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$  z mnożeniem  $\circ$ . Wiedząc, że  $(1 + \sqrt{7}) \circ 1 = 2 + \sqrt{5}$ , wylicz  $\sqrt{7} \circ \sqrt{5}$ .
2. Niech  $V = \mathbb{R}[x]$  będzie przestrzenią wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych traktowaną jako przestrzeń liniowa nad ciałem  $\mathbb{Q}$ . Niech  $A \subseteq V$  będzie zbiorem wszystkich wielomianów o wymiernym wyrazie wolnym, zaś  $B \subseteq V$  zbiorem wszystkich wielomianów o wymiernym współczynniku przy wyrazie o najwyższej potęgze. Zbadaj, czy zbiory  $A$  lub  $B$  są podprzestrzeniami liniowymi.
3. Niech  $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  z określonym dodawaniem  $z_1 \oplus z_2 = z_1 \cdot z_2$ . Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Udowodnij, że nie da się tak zdefiniować operacji mnożenia elementów  $V$  przez skalary z  $K$ , żeby otrzymana struktura była przestrzenią liniową.
4. Wykaż, że układ  $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$  wektorów w  $\mathbb{R}^4$  jest liniowo niezależny. Uzupełnij go do bazy  $\mathbb{R}^4$  i w znalezionej bazie oblicz współrzędne wektora  $(1, 1, 1, 1)$ .
5. Niech

$$V = \text{lin}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (1, 1, 2, 3)) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Znajdź układ równań liniowych opisujących  $V$ .

6. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni  $V \subseteq \mathbb{R}^5$  rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$