

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 20. – rozwiązania

10 grudnia 2019

1. Wykazać, że rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ma rząd 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $ad - bc \neq 0$.

Rzeczywiście, jeśli $ad = bc$, to $d(a, b) = (ad, bd) = (bc, bd) = b(c, d)$, zatem ta macierz ma rząd ≤ 1 . Jeśli ta macierz ma rząd ≤ 1 , to rzędy są liniowo zależne. Zakładając, że żaden z wierszy nie jest zerowy, mamy $x(a, b) = (c, d)$ dla pewnego $x \in K$. Zatem $xa = c$ oraz $xb = d$. W takim razie, $ad = xab = bc$.

2. Wykazać, że jeśli $A = [a_{ij}] \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ jest niezerową macierzą taką, że $a_{ij} = -a_{ji}$, to $r(A) = 2$.

W takim razie ta macierz ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście $r(A) \geq 2$, jeśli co najmniej jedno z a, b, c jest niezerowe, ale $a(-b, -c, 0) - b(-a, 0, c) + c(0, a, b) = (0, 0, 0)$, zatem $r(A) \leq 2$, czyli $r(A) = 2$.

3. Niech bazą V będzie $(1, -1, 1, 1, -2)$, $(4, 4, -4, -4, 0)$, $(3, 1, 3, -1, 3)$, zaś bazą W wektory $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$. Uzupełnić bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ korzystając z wektorów z W .

Wypisuję macierz i ją przekształcam:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy 4 wierszy niezerowych, więc zadanie nie jest wykonalne – nawet połączone bazy obu przestrzeni nie rozpinają $\mathbb{R}^5$.

4. Opisać układem równań liniowych przestrzeń $\text{lin}((-9, 3, 6, -3), (-4, 2, 1, 5), (-5, 5, 4, 3))$.

Rozwiązanie:

Wypisujemy macierz układu równań na możliwe współczynniki, kolejność kolumn a_4, a_3, a_2, a_1 (kolumna zer w pamięci):

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 & -9 \\ 5 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 5w_1, w_3 - 3w_1}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & 7 & -19 \\ 0 & 10 & 8 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot 11} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & 7 & -19 \\ 0 & 110 & 88 & -154 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 10w_2} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{18}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_3, w_2 - 7w_3} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 11 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{11}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A więc rozwiązanie bazowe to $(a_1, -2a_1, 3a_1, a_1)$, czyli przestrzeń współczynników jest jednowymiarowa, a jej baza to np.: $\{(1, -2, 3, 1)\}$, czyli szukany układ równań składa się z jednego równania i jest to równanie:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

5. Znaleźć wymiar podprzestrzeni przestrzeni $K[x]$ złożonej z wszystkich wielomianów stopnia mniejszego od 6 podzielnych przez $x - 1$.

Zauważmy, że $x^5 - x^4, x^4 - x^3, x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1$ jest układem wektorów liniowo niezależnych w tej przestrzeni. Co więcej, jeśli w jest w tej przestrzeni, to $w = v(x - 1)$, gdzie $v = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ jest wielomianem stopnia co najwyżej 4. Wtedy: $w = a(x^5 - x^4) + b(x^4 - x^3) + c(x^3 - x^2) + d(x^2 - x) + e(x - 1)$ jest kombinacją tego wybranego układu wektorów. Zatem jest on bazą i wymiar badanej przestrzeni wynosi 5.

6. Niech układ $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej V . Niech $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Układ $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ jest bazą V ,
- (ii) $w \in \text{lin}(v_1 + w, \dots, v_n + w)$,
- (iii) $\sum_{i=1}^n a_i \neq -1$.

Implikacja (i) $\rightarrow$ (ii) jest oczywista.

Udowodnijmy, że z (ii) wynika (iii). Skoro dla pewnych $b_1, \dots, b_n$, $w = b_1(v_1 + w) + \dots + b_n(v_n + w)$, to mamy

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = w = b_1(v_1 + w) + \dots + b_n(v_n + w) = (b_1 + a_1(b_1 + \dots + b_n))v_1 + \dots + (b_n + a_n(b_1 + \dots + b_n))v_n,$$

a skoro $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą, to $a_i = b_i + a_i(b_1 + \dots + b_n)$ dla każdego i . Ale jeśli $\sum_{i=1}^n a_i = -1$, to $-1 = \sum_i b_i - 1(\sum_i b_i)$, czyli $-1 = 0$, sprzeczność.

Dowodzimy, że z (iii) wynika (ii). Wystarczy pokazać, że te wektory są liniowo niezależne. Zatem niech

$$b_1(v_1 + w) + \dots + b_n(v_n + w) = \mathbf{0},$$

wtedy

$$\mathbf{0} = b_1(v_1 + w) + \dots + b_n(v_n + w) = (b_1 + a_1(b_1 + \dots + b_n))v_1 + \dots + (b_n + a_n(b_1 + \dots + b_n))v_n,$$

a skoro $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest bazą, to $0 = b_i + a_i(b_1 + \dots + b_n)$ dla każdego i . W takim razie suma wszystkich $0 = \sum_i b_i + (\sum_i a_i)(\sum_i b_i) = (1 + \sum_i a_i)(\sum_i b_i)$, a skoro $\sum_i a_i \neq -1$, to $1 + \sum_i a_i \neq 0$, więc $\sum_i b_i = 0$. Ale wtedy $0 = b_i$ dla każdego i , co dowodzi liniowej niezależności, a więc tego, że $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ jest bazą V .

7. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ z naturalnym dodawaniem będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ z mnożeniem $\circ$. Wiedząc, że $\sqrt{3} \circ 1 = 2 + \sqrt{5}$, wylicz $\sqrt{3} \circ \sqrt{5}$.

W takim razie

$$3 \circ 1 (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) \circ 1 = \sqrt{3} \circ (\sqrt{3} \circ 1) = \sqrt{3} \circ (2 + \sqrt{5}) = \sqrt{3} \circ 2 + \sqrt{3} \circ \sqrt{5},$$

Zatem

$$\sqrt{3} \circ \sqrt{5} = 3 \circ 1 - \sqrt{3} \circ 2 = (1 + 1 + 1) \circ 1 - \sqrt{3} \circ (1 + 1) = 1 + 1 + 1 - \sqrt{3} \circ 1 - \sqrt{3} \circ 1 = 3 - 4 - 2\sqrt{5} = -1 - 2\sqrt{5}.$$

8. Zilustruj twierdzenie Steinitza o wymianie na przykładzie bazy standardowej $\mathbb{R}^4$ oraz układu wektorów $((-2, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 3))$.

Twierdzenie Steiniza mówi, że każdy układ liniowo niezależny, w tym przypadku

$$((-2, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 3)),$$

mogą uzupełnić do bazy używając w tym celu wybranych wektorów z pewnej ustalonej bazy (w tym wypadku standardowej). I rzeczywiście w tym przypadku wystarczy wziąć np. $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$. Sprawdźmy:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + w_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli rzeczywiście dostaliśmy bazę.

9. Niech K będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ wszystkich funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ze standardowymi działaniami.

- a) Czy zbiór $A \subseteq K$ wszystkich funkcji parzystych jest podprzestrzenią liniową?

Niech f, g będą funkcjami parzystymi, wtedy $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, więc $f+g$ jest funkcją parzystą.

Jeśli dodatkowo $a \in \mathbb{R}$, to $(af)(-x) = af(-x) = af(x) = (af)(x)$. Czyli af też jest parzysta, zatem to jest podprzestrzeń.

- b) Czy zbiór $B \subseteq K$ wszystkich funkcji nieparzystych jest podprzestrzenią liniową?

Niech f, g będą funkcjami nieparzystymi, wtedy $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$, więc $f+g$ jest funkcją nieparzystą.

Jeśli dodatkowo $a \in \mathbb{R}$, to $(af)(-x) = af(-x) = -af(x) = -(af)(x)$. Czyli af też jest nieparzystą, zatem to jest podprzestrzeń.

- c) Opisz $A \cap B$.

Jeśli $-f(x) = f(-x) = f(x)$, to $f(x) = 0$, zatem $A \cap B = \{0\}$, gdzie 0 to funkcja stale równa zero.

- d) Udowodnij, że każdą funkcję $f \in K$ można jednoznacznie zapisać jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej.

Rzeczywiście mając funkcję f , niech $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ jest oczywiście funkcją parzystą, natomiast $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$ jest funkcją nieparzystą, oraz $f(x) = g(x) + h(x)$.

Założmy teraz, że $f = g' + h'$, gdzie g' też jest parzysta, a h' jest nieparzysta. Wtedy $f(-x) = g'(-x) + h'(-x) = g'(x) - h'(x)$. Zatem $g'(x) = (f(x) + f(-x))/2 = g(x)$, więc również $h'(x) = h(x)$.

- e) Czy zbiór $C \subseteq K$ wszystkich funkcji okresowych jest podprzestrzenią liniową?

Nie, np. $f(x) = [x]$ oraz $g(x) = [x\sqrt{2}]$ są okresowe, ale $f+g$ już nie, bowiem $(f+g)(x) = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x, x\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Rzeczywiście, zakładając przeciwnie $x\sqrt{2}/x = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, co nie jest prawdą.

- f) Czy zbiór $F \subseteq K$ wszystkich funkcji o okresie będącym liczbą wymierną jest podprzestrzenią liniową?

Tak, oczywiście, jeśli f jest funkcją okresową, to af jest funkcją o tym samym okresie. Niech zatem f, g będą funkcjami o okresach odpowiednio $p/q, p'/q' \in \mathbb{Q}$, $p, p', q, q' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wtedy $(f+g)(pp' + x) = f(pp' + x) + g(pp' + x) = f(p'q \cdot (p/q) + x) + f(pq' \cdot (p'/q') + x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, więc $f+g$ ma okres $pp' \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

- g) Opisz $F \cap \mathbb{Q}[x]$.

Niech $w(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych o okresie $q \in \mathbb{Q}$. W takim razie wielomian $w(x) - w(0)$ ma nieskończenie wiele pierwiastków, czyli $w(x) - w(0) = 0$, zatem $w(x) = w(0) \in \mathbb{Q}$, więc $F \cap \mathbb{Q}[x]$ to zbiór wszystkich funkcji stałych o wartości wymiernej.

10. Niech $W = \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$ będzie podprzestrzenią przestrzeni V . Udowodnij, że $\dim W = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1, \dots, v_n$ jest bazą przestrzeni W .

Oczywiście, jeśli jest to baza, to oczywiście $\dim W = n$. Załóżmy zatem, że $\dim W = n$ oraz, że $v_1, \dots, v_n$ nie jest bazą, czyli nie jest liniowo niezależnym układem wektorów. Zatem pewien z nich, powiedzmy v_i jest kombinacją pozostałych. Ale wtedy $W = \text{lin}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$, zatem $\dim V \leq n-1$.