

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 20. – rozwiązania pracy domowej

10 grudnia 2019

1. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ z naturalnym dodawaniem będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ z mnożeniem $\circ$. Wiedząc, że $(1 + \sqrt{7}) \circ 1 = 2 + \sqrt{5}$, wylicz $\sqrt{7} \circ \sqrt{5}$.

Mamy

$$(1 - \sqrt{7}) \circ ((1 + \sqrt{7}) \circ 1) = (1 - \sqrt{7}) \circ (2 + \sqrt{5}) = 1 \circ 2 + 1 \circ \sqrt{5} - \sqrt{7} \circ 2 - \sqrt{7} \circ \sqrt{5},$$

zatem

$$\begin{aligned}\sqrt{7} \circ \sqrt{5} &= 1 \circ 2 + 1 \circ \sqrt{5} - \sqrt{7} \circ 2 - (1 - \sqrt{7}) \circ ((1 + \sqrt{7}) \circ 1) = \\ &= 2 + \sqrt{5} - \sqrt{7} \circ (1 + 1) - (1 - 7) \circ 1 = 2 + \sqrt{5} - \sqrt{7} \circ 1 - \sqrt{7} \circ 1 - 1 \circ 1 - 1 \circ 1 + 1 \circ 1 + 1 \circ 1 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \circ 1 = \\ &= 2 + \sqrt{5} - (1 + \sqrt{7}) \circ 1 - (1 + \sqrt{7}) \circ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + \sqrt{5} - (2 + \sqrt{5}) - (2 + \sqrt{5}) + 8 = 6 - \sqrt{5}.\end{aligned}$$

2. Niech $V = \mathbb{R}[x]$ będzie przestrzenią wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych traktowaną jako przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{Q}$. Niech $A \subseteq V$ będzie zbiorem wszystkich wielomianów o wymiernym wyrazie wolnym, zaś $B \subseteq V$ zbiorem wszystkich wielomianów o wymiernym współczynniku przy wyrazie o najwyższej potędze. Zbadaj, czy zbiory A lub B są podprzestrzeniami liniowymi.

Niech $v, w \in A$. Wtedy $v + w \in A$, bowiem również wyraz wolny tego wielomianu jest sumą wyrazów wolnych, czyli liczb wymiernych, jest więc liczbą wymierną. Jeśli dodatkowo $q \in \mathbb{Q}$, to $qw \in A$, bowiem wyraz wolny tego wielomianu jest iloczynem wymiennego wyrazu wolnego wielomianu w oraz liczby wymiernej q , jest wymierny. Zatem A jest podprzestrzenią tej przestrzeni.

Tymczasem B nie jest podprzestrzenią, bowiem $-x^2 + \sqrt{2}x, x^2 \in B$, ale $(-x^2 + \sqrt{2}x) + x^2 = \sqrt{2}x \notin B$.

3. Niech $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ z określonym dodawaniem $z_1 \oplus z_2 = z_1 \cdot z_2$. Niech K będzie dowolnym ciałem. Udowodnij, że nie da się tak zdefiniować operacji mnożenia elementów V przez skalary z K , żeby otrzymana struktura była przestrzenią liniową.

Założmy przeciwnie, że istnieje taka przestrzeń liniowa oraz oznaczmy mnożenie przez skalar jako $\circ$. Zauważmy, że $-1 \in V$ oraz $-1 \oplus -1 = 1$, oraz $1 \in V$ jest wektorem zerowym w tej przestrzeni, bowiem $z \oplus 1 = z$. W takim razie $0 \circ (-1) = 1 = -1 \oplus -1 = (1 + 1) \circ (-1)$. W takim razie w ciele K , $1 + 1 = 0$, bo w przeciwnym wypadku istnieje odwrotność a skalaru $1 + 1$, ale to oznacza, że $1 = a \circ 1 = (a \cdot (1 + 1)) \circ (-1) = 1 \circ (-1) = -1$, co nie jest prawdą.

Ale biorąc zamiast -1 liczbę $z = -1/2 + \sqrt{3}i/2$ dowodzimy analogicznie, że w naszym ciele $1 + 1 = 0$. Zatem $1 + 1 = 1 + 1 + 1$, czyli $1 = 0$, co stanowi sprzeczność.

4. Wykaż, że układ $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$ wektorów w $\mathbb{R}^4$ jest liniowo niezależny. Uzupełnij go do bazy $\mathbb{R}^4$ i w znalezionej bazie oblicz współrzędne wektora $(1, 1, 1, 1)$.

Rzeczywiście układ ten wpisany do macierzy wierszami daje od razu postać schodkową. Jest więc liniowo niezależny. Po dodaniu wektora $(0, 0, 0, 1)$ stanowi bazę $\mathbb{R}^4$ (bo ma 4 wektory i nadal jest liniowo niezależny z tej samej przyczyny). Mamy też:

$$(1, 1, 1, 1) = 1(1, 1, 0, 0) + 0(0, 1, 1, 0) + 1(0, 0, 1, 1) + 0(0, 0, 0, 1),$$

zatem szukane współrzędne to $1, 0, 1, 0$.

5. Niech $V = \text{lin}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (1, 1, 2, 3)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Znajdź układ równań liniowych opisujących V .

Układ równań opisujący współczynniki szukanego układu równań to:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2, w_1 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_4 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_3, w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to $(0, a_4, -2a_4, a_4)$, czyli jedyny wektor bazowy przestrzeni współczynników to $(0, 1, -2, 1)$, zatem V jest opisana jednym równaniem:

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0.$$

6. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni $V \subseteq \mathbb{R}^5$ rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \\ & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne to $(-x_2 - 4x_4 + 5x_5, x_2, -3x_4 + 5x_5, x_4, x_5)$, a zatem baza V to

$$((-1, 1, 0, 0, 0), (-4, 0, -3, 1, 0), (5, 0, 5, 0, 1))$$

oraz $\dim V = 3$.