

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 19.

6 grudnia 2019

1. Niech $f_1, \dots, f_k$ będzie układem wielomianów w $K[x]$ nie zawierającym wielomianu zerowego oraz takim, że $\deg f_i \neq \deg f_j$ o ile $i \neq j$. Wykazać, że układ $f_1, \dots, f_k$ jest liniowo niezależny.
2. Rozpatrzmy $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Wykaż, że układ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ jest w tej przestrzeni liniowo niezależny.
3. Niech V i W będą podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^5$.

$$V = \text{lin}((10, 3, 9 + s, 1, 2 - s),$$

$$(4, 1, 6, 1, 1), (2, 1, -1, -1, -2)),$$

zaś W niech będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + tx_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Znaleźć $\dim V$ i $\dim W$ w zależności od $s, t \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie takie s, t , że $V = W$.

4. Niech V będzie przestrzenią rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 0 \\ x - y + z - t + w = 0 \end{cases}$$

Uzupełnić, o ile to możliwe następujące układy wektorów do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami należącymi do V .

- a) $(5, -1, 2, 1, 7), (2, 3, -6, -3, 4),$
- b) $(1, 2, 3, -2, -4), (6, 4, -5, -4, -1),$
 $(3, -2, -14, 2, 11).$

5. Opisać układem równań liniowych przestrzenie:

- a) $\text{lin}((4, 1, 2, -3), (2, 3, 1, -9), (2, -1, 1, 3),$
 $(6, 4, 3, -12)),$
- b) $\text{lin}((5, 1, 9, 0, 2), (5, 2, -2, 5, -1), (4, 1, 5, 1, 1)).$

6. Podać przykład wektora $\alpha \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y - z = 0\}$, że układ $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \alpha$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

7. Czy istnieje taki wektor

$$\beta \in \text{lin}((3, 5, 8), (-1, 3, 2)),$$

że układ $(2, 1, 3), (1, 4, 5), \beta$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Jeśli tak to podać taki wektor β .

8. Znaleźć rzędy macierzy nad $\mathbb{Z}_p$ w zależności od liczby pierwszej p .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga: w tym zadaniu za każdym razem, gdy użyta jest liczba $n \geq p$ należy ją interpretować jako sumę n jedynek.

9. Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & s^2 - 2 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 3 & -s & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od $s \in \mathbb{R}$.

10. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + 7z = t \\ 5x + sy + 11z = 0 \\ 2x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Korzystając z Tw. Kroneckera-Capelliego określ dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$

- a) układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie?
- b) ma nieskończenie wiele rozwiązań?
- c) nie ma rozwiązań?

11. Niech $A, B \in M_{m \times n}(K)$ dla pewnego ciała K . Wykazać, że $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.