

Algebra dla MSEM I, 2019/2020

ćwiczenia 18.

3 grudnia 2019

1. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni liniowej $\text{lin}((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 3), (0, -3, 3, 1), (3, 4, 3, 4))$.
2. Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni opisanej następującym układem równań.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Opisać przestrzeń $\text{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 2, 7), (1, 3, 1, 4))$ układem równań liniowych.
4. Znaleźć współrzędne wektora $(1, 8, 10, 10)$ w bazie $(1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 3), (-1, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2)$
5. Rozpatrzmy następujące wektory przestrzeni $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (3, 2, 1), \alpha_2 = (7, 3, 1), \alpha_3 = (4, 2, 1), \beta_1 = (0, 2, 1), \beta_2 = (1, 1, 2), \beta_3 = (1, 0, 0)$.
 - a) wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znaleźć współrzędne wektorów $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ w tej bazie,
 - b) podać przykład takiej bazy, że wektor β_1 ma w niej współrzędne $1, 1, 0$, a wektor β_2 współrzędne $0, 0, 1$.
6. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozpiętej przez wektory $(3, 2, 1, 1), (5, 0, 2, 3), (4, 1, 4, 5), (4, 1, -1, -1)$.
7. Opisać tę podprzestrzeń układem równań.
8. Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni rozwiązań następującego układu równań.

$$\begin{cases} 5a + 10b + 6c + 3d = 0 \\ 2a + 4b + 4c + 3d = 0 \\ 3a + 6b + 5c + 5d = 0 \end{cases}$$

9. Znaleźć współrzędne wektora $(5, 0, 0)$ w bazie zadanej wektorami $(1, 2, -1), (1, 0, 2), (0, 1, 1)$.
10. Niech W będzie podprzestrzenią opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Znajdź bazę przestrzeni W i uzupełnij ją do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

11. Podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że wektor $(1, 2, 3)$ ma w niej współrzędne $3, 1, 2$.
12. Rozpatrzmy macierze $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Które z poniższych macierzy należą do przestrzeni $W = \text{lin}(A_1, A_2) \subseteq M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V nad ciałem K . Niech $w_1 = v_1$, oraz $w_i = v_i + v_{i-1}$ dla $i \in \{2, \dots, k\}$. Wykazać, że układ $w_1, \dots, w_k$ jest liniowo niezależny.