

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 15. – rozwiązania zadań domowych

22 listopada 2019

1. Niech K będzie ciałem oraz $a, b \in K$. Wykaż, że $(-a) \cdot (-b) = ab$.

Zauważmy, że $(-a) \cdot (-b) + a \cdot (-b) = ((-a) + a) \cdot (-b) = 0 \cdot (-b) = 0$, czyli $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$.

2. Rozwiąż układ równań o współczynnikach w $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 5c - d = 2 \\ -8a + 12b - 26c + 6d = 4 \\ 6a - 9b + 18c - 4d = -4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2a - 3b + 5c - d = 2 \\ -8a + 12b - 26c + 6d = 4 \\ 6a - 9b + 18c - 4d = -4 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ -8 & 12 & -26 & 6 & 4 \\ 6 & -9 & 18 & -4 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 4w_1, w_3 - 3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_2/2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Więc ten układ jest sprzeczny.

3. Rozwiąż układ równań o współczynnikach w $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} 2a - 3b - d = 2 \\ -3a + 2b - c + d = 4 \\ a - 4b + 3c - 4d = -4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2a - 3b - d = 2 \\ -3a + 2b - c + d = 4 \\ a - 4b + 3c - 4d = -4 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -4 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 4w_1, w_3 - 3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Więc ten układ jest sprzeczny.

4. Sprawdź dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ układ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_3 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 6x_1 + (5-t)x_2 - x_3 = s \end{cases}$$

jest sprzeczny, a dla jakich oznaczony.

Sprowadzam do postaci schodkowej:

$$\begin{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 & 10 \\ 6 & 5-t & -1 & s \end{array} \right] & \xrightarrow{3w_2+2w_1, 3w_3-5w_1, w_4-2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2-t & -3 & s-12 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3+2w_2, w_4-3w_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4-t & 0 & s-12 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4-t & 0 & s-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Układ jest oznaczony, jeśli każda kolumna z wyjątkiem kolumny wyrazów wolnych ma schodek. W naszym wypadku jest tak tylko wtedy, gdy $t \neq -4$. Wtedy niezależnie od s układ ma jedno rozwiązanie. Jeśli natomiast $t = -4$, to mogą zajść dwie sytuacje – albo $s = 12$ cały ten wiersz jest zerowy (i wtedy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań), albo $s \neq 12$ i wtedy rozważany wiersz generuje sprzeczność. Ostatecznie:

$$\begin{cases} t \neq -4 \Rightarrow \text{układ jest oznaczony,} \\ t = -4, s \neq 12 \Rightarrow \text{układ jest sprzeczny,} \\ t = -4, s = 12 \Rightarrow \text{układ jest niesprzeczny i nieoznaczony.} \end{cases}$$