

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 13.

15 listopada 2019

1. Sprawdź, że $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem.
2. Niech K będzie ciałem oraz $a, b, c \in K$. Wykaż, że
 - a) jeśli $a + c = b + c$, to $a = b$.
 - b) jeśli $ac = bc$ oraz $c \neq 0$, to $a = b$.
 - c) $a \cdot 0 = 0$ oraz $(-1) \cdot a = -a$.
3. W $\mathbb{Z}_5$ znaleźć:
 - a) -3 oraz 4^{-1} ,
 - b) wszystkie rozwiązania równania $2x^2 + 3 = 0$
 - c) wszystkie rozwiązania równania $x^5 - 1 = 0$.
4. Skonstruuj ciało złożone z 4 elementów.
5. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$. Niech $d \in \mathbb{C}$ będzie liczbą taką, że $d^2 = b^2 - 4ac$. Wykazać, że pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ są liczby $\frac{-b+d}{2a}$ oraz $\frac{-b-d}{2a}$.
6. Niech $f \in \mathbb{R}[x]$. Wykazać, że:
 - a) jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu f w $\mathbb{C}$, to $\bar{c}$ też jest pierwiastkiem f ,
 - b) wielomian f rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .
7. Dla każdego z poniższych wielomianów znaleźć wszystkie jego pierwiastki, rozłożyć ten wielomian nad $\mathbb{C}$ na czynniki stopnia 1 oraz rozłożyć go nad $\mathbb{R}$ na czynniki stopnia ≤ 2 .
 - a) $x^2 + 4x + 5$,
 - b) $x^4 - 2x^2 + 4$,
 - c) $x^7 - x$.
8. Niech K będzie ciałem. Wykazać, że:
 - a) Wielomian stopnia n o współczynnikach w K może mieć w K co najwyżej n różnych pierwiastków.
 - b) Przekształcenie $K[x] \rightarrow K^K$ przypisujące każdemu wielomianowi odpowiadającą mu funkcję wielomianową jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy K jest ciałem nieskończonym.