

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 11.

8 listopada 2019

1. Na zbiorze $A = \mathbb{R}^2$ zadano relację $\mathcal{R}$ następująco

$$\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

- a) Wykaż, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.
 - b) Czy każda klasa abstrakcji jest równoliczna z $\mathbb{R}$?
 - c) Czy zbiór ilorazowy $A/\mathcal{R}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$?
2. Dla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, niech $\mathcal{R}_f$ oznacza relację na zbiorze $\mathbb{R}$ taką, że $x\mathcal{R}_f y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = f(y)$.
Podaj przykład:
- a) f takiego, że $\mathcal{R}_f$ ma nieprzeliczalnie wiele nieskończonych, ale przeliczalnych klas abstrakcji,
 - b) f takiego, że $\mathcal{R}_f$ ma nieskończenie, ale przeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji.
3. Niech $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}^2$. Określamy relację $\leq$ na zbiorze A następująco:

$$\langle k_1, k_2 \rangle \leq \langle n_1, n_2 \rangle \Leftrightarrow k_1 \geq n_1 \wedge k_1 + k_2 = n_1 + n_2.$$

- a) Wykaż, że $\leq$ jest częściowym porządkiem.
 - b) Czy jest to porządek liniowy?
 - c) Znajdź wszystkie elementy minimalne.
4. Ile jest par liczb zespolonych w, z , które spełniają układ równań

$$\begin{cases} 2z^3 + 5w^7 = 12 \\ 3z^3 + 7w^7 = 17 \end{cases} \quad ?$$

5. Niech $A_n = [1 + 1/n; 1 + 6/n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Opisz zbiory $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
6. Dla każdego z następujących zdań udowodnij lub podaj kontrprzykład:
- a) dla każdych zbiorów A, B, C , $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$,
 - b) dla każdych zbiorów A, B, C , $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$,
 - c) dla każdych zbiorów A, B, C , $B = C \Rightarrow A \cup B = A \cup C$.
7. Znajdź bijekcję $f: [0; 3] \rightarrow [0; 1] \cup [2; 4]$. Czy istnieje taka bijekcja f , że $f(0) = 3$?
8. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby spełniające warunek
- a) $|z + 3 - i| > 1$,
 - b) $|1 - i - \bar{z}| < 2 - \Re z$,
 - c) $\Re(1/z) \geq 1/2$,
 - d) $\operatorname{Im}(z^3) \leq \operatorname{Re}(z^3)$.
9. Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie:
- a) $z^2 = 2i$,
 - b) $z^4 = -16i$,
 - c) $(\bar{z})^2 = 2z$.

Zadania domowe

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij!

1. Niech $A = \{7, 8, 9, \dots, 15\}$. Na zbiorze A określamy relację $\leq$ następująco:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} x | y^n.$$

Wykaż, że jest to częściowy porządek na zbiorze A . Czy jest to porządek liniowy? Rozstrzygnij, czy identycznie zadana relacja jest częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2. Znaleźć dowolny najdłuższy łańcuch¹ i dowolny najdłuższy antyłańcuch² w porządku $A, \leq$ zdefiniowanym w poprzednim zadaniu. Odpowiedzi uzasadnić.
3. Niech $A_{n,t} = [n-t; n+t)$, $n, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{n,t}$, $\bigcup_{t=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,t}$ oraz $\bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,t}$.
4. Udowodnij lub wskaż kontrprzykład na następujące zdanie: dla dowolnych zbiorów A, B, C, D , $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.
5. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+3-4i}{z+5i} \right| \geq 1 \right\}$$

oraz zbiór $B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in A\}$.

¹łańcuch to taki podzbiór, że porządek na nim rozpatrywany jest liniowy

²antyłańcuch to taki podzbiór, że każde dwa jego elementy są w danym porządku nieporównywalne