

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 11. – rozwiązania

8 listopada 2019

1. Na zbiorze $A = \mathbb{R}^2$ zadano relację $\mathcal{R}$ następująco

$$\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

a) Wykaż, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności.

Rzeczywiście, jest

- zwrotna, bo dla każdych x_1, y_1 , $x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, więc $\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle x_1, y_1 \rangle$,
- symetryczna, bo jeśli $\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle x_2, y_2 \rangle$ to

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

czyli

$$x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

więc $\langle x_2, y_2 \rangle \mathcal{R} \langle x_1, y_1 \rangle$,

- przechodnia, bo jeśli $\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle x_2, y_2 \rangle$ i $\langle x_2, y_2 \rangle \mathcal{R} \langle x_3, y_3 \rangle$, to $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$, zatem $\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle x_3, y_3 \rangle$

b) Czy każda klasa abstrakcji jest równoliczna z $\mathbb{R}$?

Nie, jeśli $\langle x_1, y_1 \rangle \mathcal{R} \langle 0, 0 \rangle$, to $x_1^2 + y_1^2 = 0$, zatem $x_1 = y_1 = 0$, czyli $[\langle 0, 0 \rangle]_{\mathcal{R}} = \{\langle 0, 0 \rangle\}$ jest jednoelementowa i nie jest równoliczna z $\mathbb{R}$.

c) Czy zbiór ilorazowy $A/\mathcal{R}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$?

Tak, bowiem dla każdego $x, y \in [0; \infty)$, $\langle x, 0 \rangle \mathcal{R} \langle y, 0 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = y^2$, czyli gdy $x = y$. Zatem $f: [0; \infty) \rightarrow A/\mathcal{R}$, zadana wzorem $f(x) = [\langle 0, x \rangle]_{\mathcal{R}}$ jest funkcją różnowartościową. Mamy zatem $|A/\mathcal{R}| \geq |[0; \infty)| = |\mathbb{R}|$ oraz $|A/\mathcal{R}| \leq |A| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$, zatem z Tw. Cantora-Bernsteina, $|A/\mathcal{R}| = |\mathbb{R}|$

2. Dla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, niech $\mathcal{R}_f$ oznacza relację na zbiorze $\mathbb{R}$ taką, że $x \mathcal{R}_f y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = f(y)$. Podaj przykład:

a) f takiego, że $\mathcal{R}_f$ ma nieprzeliczalnie wiele nieskończonych, ale przeliczalnych klas abstrakcji,

Np. $f(x) = \sin x$, wtedy $[x]_{\mathcal{R}_f} = \{\pm x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, co jest zbiorem przeliczalnym. Dla każdego $x \in [0, \pi/2]$ dostajemy inną klasę abstrakcji, więc oczywiście jest ich nieprzeliczalnie wiele.

b) f takiego, że $\mathcal{R}_f$ ma nieskończenie, ale przeliczalnie wiele nieprzeliczalnych klas abstrakcji.

Np. $f(x) = [x]$. Klasy abstrakcji to $[x]_{\mathcal{R}_f} = [x; [x] + 1)$ zatem są zbiorami nieprzeliczalnymi i jest ich tylko przeliczalnie wiele.

3. Niech $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}^2$. Określamy relację $\leq$ na zbiorze A następująco:

$$\langle k_1, k_2 \rangle \leq \langle n_1, n_2 \rangle \Leftrightarrow k_1 \geq n_1 \wedge k_1 + k_2 = n_1 + n_2.$$

a) Wykaż, że $\leq$ jest częściowym porządkiem.

Sprawdzamy, że jest:

- zwrotny, bo $k_1 = k_1$ oraz $k_1 + k_2 = k_1 + k_2$, więc dla każdych k_1, k_2 , $\langle k_1, k_2 \rangle \leq \langle k_1, k_2 \rangle$
- antysymetryczny, bo jeśli $\langle k_1, k_2 \rangle \leq \langle n_1, n_2 \rangle$ oraz $\langle n_1, n_2 \rangle \leq \langle k_1, k_2 \rangle$, to w szczególności $n_1 \geq k_1 \geq n_1$, więc $k_1 = n_1$, a skoro $k_1 + k_2 = n_1 + n_2$, to również $k_2 = n_2$.

- przechodni, bo jeśli $\langle k_1, k_2 \rangle \leq \langle n_1, n_2 \rangle$ oraz $\langle n_1, n_2 \rangle \leq \langle m_1, m_2 \rangle$, to $m_1 \geq n_1 \geq k_1$ oraz $k_1 + k_2 = n_1 + n_2 = m_1 + m_2$, a zatem $\langle k_1, k_2 \rangle \leq \langle m_1, m_2 \rangle$.

b) Czy jest to porządek liniowy?

Nie, np. $\langle 1, 1 \rangle \not\leq \langle 1, 2 \rangle$ oraz $\langle 1, 2 \rangle \not\leq \langle 1, 1 \rangle$, bowiem do każdego byłoby niezbędne, żeby $1 + 1 = 1 + 2$, co nie jest prawdą.

c) Znajdź wszystkie elementy minimalne.

Dla każdego $\langle a, b \rangle \in A^2$, gdzie $a \neq 10, b \neq 1$, mamy $\langle a + 1, b - 1 \rangle \in A^2$ oraz $\langle a + 1, b - 1 \rangle \leq \langle a, b \rangle$, więc takie elementy nie są minimalne. Tym czasem jeśli $\langle a, b \rangle \leq \langle 10, c \rangle$, to $a \geq 10$, czyli $a = 10$ i w takim razie $c = b$, czyli każdy element $\langle 10, c \rangle$ dla $c \in A$ jest minimalny. Podobnie, jeśli $\langle a, b \rangle \leq \langle c, 1 \rangle$, to $a \geq c$, ale $a + b = c + 1 \leq a + 1$, zatem $b \leq 1$, czyli $b = 1$, zatem też $a = c$, zatem każdy element $\langle c, 1 \rangle$, dla $c \in A$ jest także minimalny.

4. Ile jest par liczb zespolonych w, z , które spełniają układ równań

$$\begin{cases} 2z^3 + 5w^7 = 12 \\ 3z^3 + 7w^7 = 17 \end{cases} \quad ?$$

W takim razie $w^7 = 2, z^3 = 1$, wobec tego jest 7 możliwych wartości w oraz 3 możliwe wartości z . Razem 21 par.

5. Niech $A_n = [1 + 1/n; 1 + 6/n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Opisz zbiory $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Mamy $A_1 = [2; 7), A_2 = [3/2; 4), A_3 = [4/3; 3), A_4 = [5/4; 5/2), A_5 = [6/5; 11/5), A_6 = [7/6; 2)$. Zatem $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1 \cap A_6 = \emptyset$, zatem $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Tymczasem $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (1, 7)$. Rzeczywiście, jeśli $x \in [2; 7)$ to $x \in A_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Jeśli natomiast $x \in (1, 2)$, to niech $n = \lceil 1/(x-1) \rceil$. Wtedy $1/n \leq x-1 < 1/n + 1 \leq 6/n$, czyli $x \in A_n$, a zatem $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Oczywiście, jeśli $x \leq 1$ lub $x \geq 7$, to dla każdego n , $x < 1 + 1/n$ lub $x \geq 1 + 6/n$, zatem $x \notin A_n$, czyli $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

6. Dla każdego z następujących zdań udowodnij lub podaj kontrprzykład:

a) dla każdych zbiorów A, B, C , $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$,

Nieprawda. $A = \emptyset, B = \emptyset, C = \{0\}$.

b) dla każdych zbiorów A, B, C , $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$,

Nieprawda. $A = \emptyset \setminus \{0\}, B = \emptyset, C = \{0\}$.

c) dla każdych zbiorów A, B, C , $B = C \Rightarrow A \cup B = A \cup C$.

Prawda. Załóżmy, że $B = C$. Mamy $x \in A \cup B$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in A$ lub $x \in B = C$, wtedy i tylko wtedy, $x \in A \cup C$.

7. Znajdź bijekcję $f: [0; 3] \rightarrow [0; 1] \cup [2; 4]$. Czy istnieje taka bijekcja f , że $f(0) = 3$?

Odpowiemy na oba pytania jednocześnie znajdując odpowiednią bijekcję. Niech

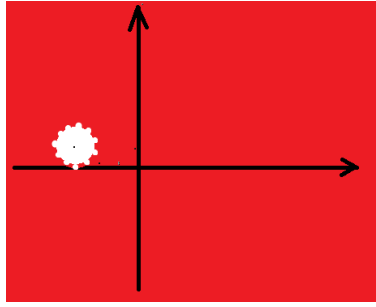
$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ x - 1, & x \in [1; 2] \\ 2, & x = 3 \\ x, & x \in (2; 3) \\ 2x + 3, & x = 1/2^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ x + 3, & \text{wpp.} \end{cases}$$

Ta funkcja przeprowadza 3 na 0, przedział $[1; 2]$ na przedział $[0; 1]$, 3 a 2, przedział $(2; 3)$ na przedział $(2; 3)$ i w końcu przedział $(0; 1)$ na przedział $(3; 4]$.

8. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby spełniające warunek

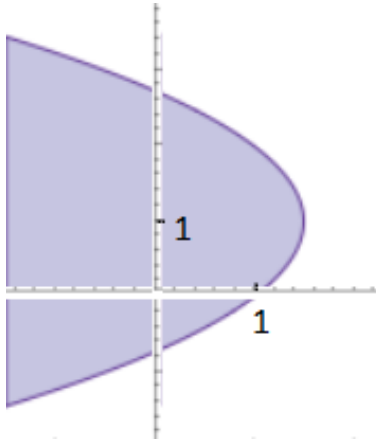
a) $|z + 3 - i| > 1$,

czyli $|z - (-3 + i)| > 1$.



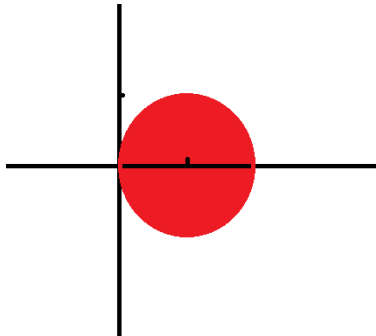
b) $|1 - i - \bar{z}| < 2 - \Re z,$

$|1 - i - \bar{z}| < 2 - \Re z$, więc jeśli $z = a + bi$, to $\sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} < 2 - a$, czyli $a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2 < a^2 - 4a + 4$, zatem $b^2 - 2b - 2 < -2a$, więc ostatecznie, $a < -b^2/2 + b + 1$.



c) $\Re(1/z) \geq 1/2,$

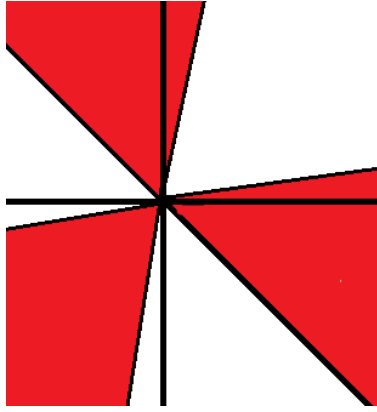
Jeśli $z = a + bi$, to $\Re(1/z) = \Re \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \geq 1/2$, zatem $2a \geq a^2 + b^2$, czyli $(a-1)^2 + b^2 \leq 1$, zatem to koło o środku w 1 i promieniu 1.



d) $\Im(z^3) \leq \Re(z^3).$

Zatem $\arg z^3 \in [0, \pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi)$. Wobec tego

$$\arg z \in [0, \pi/12] \cup [2\pi/3; 3\pi/4] \cup [4\pi/3; 17\pi/12] \cup [5\pi/12; 2\pi/3] \cup [13\pi/12; 4\pi/3] \cup [21\pi/12; 2\pi).$$



9. Znajdź wszystkie liczby zespolone spełniające równanie:

a) $z^2 = 2i$,

$|2i| = 2$, więc $|z| = \sqrt{2}$, natomiast $\text{Arg} 2i = \pi/2$, zatem możliwe argumenty z to $\pi/4$ oraz $\pi + \pi/4$. Zatem dostajemy liczby $1 + i$ oraz $-1 - i$.

b) $z^4 = -16i$,

$|-16i| = 16$, zatem $|z| = 2$. $\arg(-16i) = 3/2\pi$, zatem możliwe argumenty z , to $3\pi/8, 7\pi/8, 11\pi/8$ oraz $5\pi/8$. Nie ma sensu tego przeliczać na liczby postaci $a + bi$, bo robi się nieprzyjemnie, $\sin \pi/8 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

c) $(\bar{z})^2 = 2z$.

Zauważmy, że jeśli $\arg z = \alpha$, to argument lewej strony to -2α , a prawej to α . Zatem $3\alpha = 0$, ale to kąt, więc $\alpha = 0, 2\pi/3$ lub $-2\pi/3$. Tymczasem moduł lewej strony to $|z|^2$, a prawej to $2|z|$, zatem $|z| = 0$ lub $|z| = 2$. Zatem dostajemy cztery możliwe liczby: $0, 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$.