

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 11. – rozwiązania zadań domowych

8 listopada 2019

1. Niech $A = \{7, 8, 9, \dots, 15\}$. Na zbiorze A określamy relację $\leq$ następująco:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} x|y^n.$$

Wykaż, że jest to częściowy porządek na zbiorze A . Czy jest to porządek liniowy? Rozstrzygnij, czy identycznie zadana relacja jest częściowym porządkiem na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sprawdźmy jakie liczby są w tej relacji. Mamy tylko następujące pary:

- $7 \leq 7, 14,$
- $8 \leq 8, 10, 12, 14,$
- $9 \leq 9, 12, 15,$
- $10 \leq 10,$
- $11 \leq 11,$
- $12 \leq 12,$
- $13 \leq 13,$
- $14 \leq 14,$
- $15 \leq 15.$

Ta relacja jest:

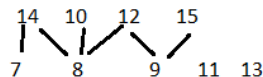
- zwrotna, bo $x|x^1$, więc $x \leq x$.
- antysymetryczna, co wynika z powyższej listy.
- przechodnia, bo jeśli $x \leq y$ oraz $y \leq z$, to $x|y^n$, $y|z^m$, zatem $x|y^n|z^{nm}$, czyli $x \leq z$.

Nie jest to porządek liniowy, bo $7 \not\leq 8$ oraz $8 \not\leq 7$.

Nie jest to porządek częściowy na $\mathbb{N}$, bo przestaje być antysymetryczny, np. $2 \leq 4$ oraz $4 \leq 2$.

2. Znaleźć dowolny najdłuższy łańcuch¹ i dowolny najdłuższy antyłańcuch² w porządku $A, \leq$ zdefiniowanym w poprzednim zadaniu.. Odpowiedzi uzasadnić.

Diagram Hassego tego porządku wygląda następująco.



Zatem najdłuższy łańcuch jest dwuelementowy, np. $\{7, 14\}$, zaś najdłuższy antyłańcuch jest 6-cio-elementowy, np. $\{14, 10, 12, 15, 11, 13\}$.

¹łańcuch to taki podzbiór, że porządek na nim rozpatrywany jest liniowy

²antyłańcuch to taki podzbiór, że każde dwa elementy są w danym porządku nieporównywalne

3. Niech $A_{n,t} = [n-t; n+t)$, $n, t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{n,t}$, $\bigcup_{t=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,t}$ oraz $\bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,t}$.

$B_n = \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{n,t} = [n-1; n+1)$, bo dla każdego $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_{n,t} \supseteq [n-1; n+1) = A_{n,1}$. Zatem $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{t=1}^{\infty} A_{n,t} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n-1; n+1) = [0; \infty)$, bo dla każdego $x > 0$, $x \in B_{\lfloor \text{floor } x \rfloor + 1}$.

$C_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,t} = \emptyset$, bowiem $C_t \subseteq A_{1,t} \cap A_{3,t} = [1-t; 1+t) \cap [2t; 4t) = \emptyset$. Zatem $\bigcup_{t=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,t} = \bigcup_{t=1}^{\infty} C_t = \emptyset$.

$D_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,t} = [1-t; \infty)$, bowiem rzeczywiście jeśli $x < 1-t$ to dla każdego n , $x \notin A_{n,t}$. Tymczasem, jeśli $x \in [1-t; 1)$ to $x \in A_{1,t}$, więc należy też do sumy. W końcu, jeśli $x \geq 1$, to $x \in A_{\lfloor x \rfloor, t}$ również należy do sumy. Zatem $\bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,t} = \bigcap_{t=1}^{\infty} D_t = [0, \infty)$, bo tyle wynosi D_1 , a dla każdego t , $D_1 \subseteq D_t$.

4. Udowodnij lub wskaż kontrprzykład na następujące zdanie: dla dowolnych zbiorów A, B, C, D , $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

To nieprawda. Np. $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, D = \{4\}$, to $(A \times B) \cup (C \times D) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$, zaś

$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}.$$

5. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-5i\} : \left| \frac{z+3-4i}{z+5i} \right| \geq 1 \right\}$$

oraz zbiór $B = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in A\}$.

Warunek na zbiór A oznacza, że

$$|z - (-3+4i)| \geq |z - (-5i)|,$$

Czyli są to punkty, które są bliżej punktu $-5i$ niż $-3+4i$ (poza samym $5i$, które jest poza dziedziną), czyli są poniżej symetralnej tego odcinka. Co więcej ta symetralna przechodzi przez 0 , bo $|0 - (-3+4i)| = 5 = |0 - (-5i)|$. Współczynnik kierunkowy tej symetralnej to $1/3$, i niech α będzie kątem, że $\tan \alpha = 1/3$. Zatem $z \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \neq -5i$ oraz

$$\alpha - \pi \leq \arg z \leq \alpha$$

Zatem $z \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \notin \{\sqrt{10}(-1+i)/2, \sqrt{10}(1-i)/2\}$ (pierwiastki z $-5i$) oraz

$$\arg z \in [\alpha/2 - \pi/2; \alpha/2] \cup [\alpha/2 + \pi/2; \alpha/2 + \pi].$$

Zbiór A zaznaczony jest na niebiesko, a zbiór B – na fioletowo.

