# Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej, 2020/2021
# spotkanie 5. Moce zbiorów i nieskończoność – zadania

19 listopada 2020

1. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne
   a) $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$
   b) $\mathbb{N} \setminus \{2020\}$
   c) zbiór liczb parzystych
2. Sprawdź, czy dla dowolnych zbiorów $A, B, C, D$, jeśli $|A| \leq |C|$ oraz $|B| \leq |D|$, to $|A \cup B| \leq |C \cup D|$.
3. Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów $A, B$:
   a) jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$?
   b) jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$?
4. Udowodnij, że są równoliczne:
   a) $A = (-1; 1)$, $B = (2, 4)$.
   b) $A = (0; 1)$, $B = (2, 4)$.
   c) $A = (0; \infty)$, $B = \mathbb{R}$.
   d) $A = (0, 1), B = (0, 1] \cup \{2, 3\}$,
   e) $A = (0, 1), B = (0, 1) \cup \mathbb{N}$,
5. Udowodnij, że istnieje liczba całkowita niebędąca pierwiastkiem żadnego równania drugiego stopnia o współczynnikach wymiernych.
6. Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na przeliczalnie wiele przeliczalnych podzbiorów.
7. Czy istnieje zbiór $A$, taki, że $|\mathcal{P}(A)| = |\mathbb{N}|$?
8. Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, który nie przechodzi przez żaden punkt o współrzędnych wymiernych.
9. Rozstrzygnij jakąś moc ma:
   a) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o obu współrzędnych wymiernych.
   b) zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.
   c) Zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.
   d) zbiór wszystkich okresowych ciągów liczb wymiernych
10. Udowodnij twierdzenie Cantora!