Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej, 2020/2021
spotkanie 5. Moce zbiorów i nieskończoność

19 listopada 2020

1. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne

   a) $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$

   Mamy bijekcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\pi\}$, $f(n) = \begin{cases} \pi\colon n = 0 \\ n-1\colon n > 1 \end{cases}$.

   b) $\mathbb{N} \setminus \{2020\}$

   Mamy bijekcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{2020\}$, $f(n) = \begin{cases} n\colon n < 2020 \\ n+1\colon n \geq 2020 \end{cases}$.

   c) zbiór liczb parzystych
   Jeśli A to zbiór liczb parzystych, to mamy bijekcję $f\colon \mathbb{N} \to A$ zadaną jako $f(n) = 2n$.

2. Sprawdź, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C, D, jeśli $|A| \leq |C|$ oraz $|B| \leq |D|$, to $|A \cup B| \leq |C \cup D|$.

   Dla zbiorów skończonych może tak nie być! $A = \{1\}, B = \{2\} = C = D$, mamy $|A| \leq |C|$ oraz $|B| \leq |D|$, ale $A \cup B = \{1, 2\}$, a $C \cup D = \{2\}$.

   Dla zbiorów nieskończonych zawsze tak będzie, bo można udowodnić, że $|A \cup B| = |A|$, jeśli $|B| \leq |A|$.

3. Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B:

   a) jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$?
   Nie, np. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, ale $|\mathbb{Z} \setminus N| = |\mathbb{N}|$, lecz $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \varnothing$.

   b) jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$?
   Tak. Niech $f\colon A \setminus B \to B \setminus A$ będzie bijekcją. Wtedy niech $g\colon A \to B$ będzie zadane następującym wzorem:

   $$g(a) = \begin{cases} f(a) \text{ jeśli } a \in A \setminus B \\ a \text{ jeśli } a \in A \cap B \end{cases}$$

   Ponieważ f było bijekcją, to również g jest bijekcją. □

4. Udowodnij, że są równoliczne:

   a) $A = (-1; 1)$, $B = (2, 4)$.
   Mamy bijekcję $f\colon A \to B$ zadaną wzorem $f(x) = x + 3$.

   b) $A = (0; 1)$, $B = (2, 4)$.
   Mamy bijekcję $f\colon A \to B$ zadaną wzorem $f(x) = 2x + 2$.

   c) $A = (0; \infty)$, $B = \mathbb{R}$.
   Mamy bijekcję $f\colon B \to A$ zadaną wzorem $f(x) = 2^x$.

   d) $A = (0, 1), B = (0, 1] \cup \{2, 3\}$,

   $$f\colon B \to A,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2},\ x = 3 \\ \frac{1}{4},\ x = 2 \\ \frac{1}{2^{k+3}},\ x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N} \\ x,\ \text{wpp.} \end{cases}.$$

e) $A = (0,1), B = (0,1) \cup \mathbb{N}$,

$$f\colon A \to B,\ f(x) = \begin{cases} k-1\colon x = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \frac{1}{k+1}\colon x = \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ x \text{ wpp.} \end{cases}$$

5. Udowodnij, że istnieje liczba całkowita niebędąca pierwiastkiem żadnego równania drugiego stopnia o współczynnikach wymiernych.

   Każde takie równanie jest zdefiniowane przez dwie liczby wymierne p, q, którym odpowiada równanie $x^2 + px + q = 0$ (pozostałe można otrzymać z tego mnożąc przez liczbę wymierną stronami, ale to nie zmieni jego pierwiastków). Zatem takich równań jest tyle, co $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, czyli przeliczalnie wiele, bo produkt zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny. Każde z nich ma co najwyżej dwa pierwiastki – a więc jest ich też co najwyżej przeliczalnie wiele (suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna). Ale wszystkich liczb rzeczywistych jest continuum wiele, więc musi istnieć jakaś niebędąca pierwiastkiem.

6. Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na przeliczalnie wiele przeliczalnych podzbiorów.

   Możemy skorzystać z dowodu równoliczności $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z $\mathbb{N}$ i jako te podzbiory wziąć numery pokoi w hotelu Hilberta do których zostały zakwaterowane pary o pierwszej liczbie odpowiednio: 0, 1, 2, itd. W sumie to wszystkie pokoje Hilberta, czyli liczby naturalne, ale w każdej grupie będzie ich nieskończenie wiele.

   Inna metoda to taka, że do pierwszej grupy biorę wszystkie liczby nieparzyste, do drugiej te podzielne przez 4 z resztą 2, do trzeciej – te podzielne przez 8 z resztą 4, itd.

7. Czy istnieje zbiór A, taki, że $|\mathcal{P}(A)| = |\mathbb{N}|$?

   Nie, moc zbioru podzbiorów zbioru skończonego jest skończona, ale już moc zbioru podzbiorów najmniejszego zbioru nieskończonego, czyli zbioru przeliczalnego ma moc continuum.

8. Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, który nie przechodzi przez żaden punkt o współrzędnych wymiernych.

   Ustalmy środek okręgu na punkt $(0,0)$. Istnieje continuum okręgów o tym środku – tyle ile możliwych promieni, czyli $|(0,\infty)| = |\mathbb{R}|$. Tymczasem, punktów na płaszczyźnie o obu współrzędnych wymiernych jest $|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|$, czyli przeliczalnie wiele i przez każdy z nich przechodzi tylko jeden okrąg o środku w punkcie $(0,0)$. Zatem, gdyby każdy okrąg o środku w $(0,0)$ przechodził przez punkt o współrzędnych wymiernych dałoby się je wszystkie zakwaterować w hotelu Hilberta (np. na podstawie zakwaterowania w tym hotelu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ – każdy okrąg kwaterujemy do pokoju, o najniższym numerze z tych, do których byłyby zakwaterowane punkty o współrzędnych wymiernych przez które on przechodzi). Co jest niemożliwe. Zatem istnieje okrąg o środku w $(0,0)$, który nie przechodzi przez żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

9. Rozstrzygnij jakąś moc ma:

   a) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o obu współrzędnych wymiernych.

      To jest $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ i ma moc przeliczalną, bo produkt dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

   b) zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

      Jest to zbiór przeliczalny, bo jest sumą przeliczalnie wielu rodzin przeliczalnych: $\{\varnothing\}$, rodzina wszystkich singletonów, rodzina wszystkich podzbiorów dwuelementowych, itd.

   c) Zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

      Jest to zbiór mocy continuum, bowiem zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest mocy continuum, a zbiór skończonych ma tylko przeliczalnie wiele elementów.

   d) zbiór wszystkich okresowych ciągów liczb wymiernych

      Jest to zbiór przeliczalny, bo jest sumą przeliczalnie wielu rodzin przeliczalnych: ciągów o okresie 1, o okresie 2, okresie 3, itd.

      A każdy z tych zbiorów jest przeliczalny, bo ten pierwszy jest równoliczny z $\mathbb{Q}$. Ten drugi jest równoliczny z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, więc też przeliczalny, ten trzeci, z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$ znów jest przeliczalny (jako produkt dwóch zbiorów przeliczalnych), itd.

10. Udowodnij twierdzenie Cantora!

    Dowód nie wprost. Załóż, że można ustawić w pary zbiór A i jego podzbiory, tak że wszystkie podzbiory są w jakiejś parze. Użyj teraz argumentu przekątniowego konstruując na złość „zły" podzbiór Z. Uzależnij mianowicie to, czy $a \in A$ należy do podzbioru Z od tego, czy nie należy do zbioru stojącego w parze z elementem a. Konkretnie jeśli do tego zbioru należy, to niech nie należy do Z i na odwrót. Okaże się, co jest sprzeczne z naszym początkowym założeniem, że „zły” podzbiór Z nie stoi w żadnej parze – rzeczywiście nie stoi w parze z żadnym a, ponieważ różni się od zbioru stojącego w parze z a, tym, czy a do niego należy!