

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej,
2020/2021
spotkanie 4. Funkcje

12 listopada 2020

1. Dla następujących zbiorów: o ile są podzbiorami płaszczyzny, naszkicuj je w układzie współrzędnych. Sprawdź, czy jest funkcją, a jeśli tak, określ dziedzinę i przeciwdziedzinę. Jeśli nie, podaj przykład dwóch par o tych samych poprzednikach i różnych następnikach, należących do tego zbioru.
 - a) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$,
 - b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x = 2^y\}$,
 - c) $\{\langle X, Y \rangle \in (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 : X \cup Y = \mathbb{N}\}$.
2. Sprawdzić, czy dana funkcja jest różnowartościowa i czy jest „na”. Jeśli nie jest różnowartościowa, podaj przykład dwóch argumentów, które przyjmują te same wartości. Jeśli nie jest „na”, to znajdź R_f .
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$,
 - b) $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, f(n, m) = 2^n \cdot 4^m$,
 - c) $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}, f(X) = \min X$.
3. Niech $X = \{1, \dots, k\}, Y = \{1, \dots, n\}$. Znajdź liczbę funkcji $f: X \rightarrow Y$:
 - a) wszystkich,
 - b) różnowartościowych,
 - c) bijekcji.
4. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq n\}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
5. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| > t^2\}$ dla $t \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} A_t$.
6. Niech $A = [-1; 1]$, zaś $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Znajdź obraz i przeciwobraz zbioru A , gdy
 - a) $f(x) = x^4 + 7$,
 - b) $f(x) = 3^x$.
7. Niech $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$ oraz $A = (-1, 1] \times [-2, 2), B = [0, 1)$. Znajdź $f[A]$ oraz naszkicuj w układzie współrzędnych $f^{-1}[B]$.
8. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (|x - 1|, |x + 1|)$. Znajdź $f^{-1}[(1, +\infty) \times (1, +\infty)]$ oraz naszkicuj w układzie współrzędnych $f[\mathbb{R}]$.
9. Sprawdź, czy następujący zbiór jest funkcją, a jeśli tak, określ dziedzinę i przeciwdziedzinę. Jeśli nie, podaj przykład dwóch par o tych samych poprzednikach i różnych następnikach, należących do tego zbioru.
$$\{\langle x, Y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) : x \geq 0 \wedge \forall_y (y \in Y \Leftrightarrow x = y^2)\}.$$
10. Niech $A_{k,x} = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < |y - k|\}$ dla $k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_{k,x}$.

11. Niech $A_{n,m} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}: f(n) = m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Znajdź:

$$\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}, \bigcup_m \bigcap_n A_{n,m}, \bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$$

oraz

$$\bigcap_m \bigcup_n A_{n,m}.$$

12. Niech $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = \langle x + 3, y - 5 \rangle$, $A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2: y = x^2\}$. Naszkicuj w układzie współrzędnych $f[A]$ oraz $f^{-1}[A]$.
13. Niech $F: \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ będzie zadana wzorem $F(f, A) = f^{-1}[A]$. Zbadać czy F jest różnowartościowa i „na” oraz obliczyć $F^{-1}[\{\{1\}\}]$.