

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej, 2020/2021

spotkanie 3. Relacje – rozwiązania

5 listopada 2020

1. Na ile i jak dużych klas abstrakcji dzieli liczby naturalne relacja równoważności, w której dwie liczby są w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą resztę z dzielenia przez 2020.

Klas abstrakcji jest 2020, bo odpowiadają one kolejnym resztom z dzielenia przez 2020, czyli $0, 1, 2, \dots, 2019$. Każda z nich jest nieskończona, bowiem jest nieskończenie wiele liczb naturalnych podzielnych przez 2020 z resztą r , dla dowolnego $r \in 0, 1, 2, \dots, 2019$.

2. Czy to jest relacja równoważności, a jeśli tak, to jakie są jej klasy abstrakcji?

a) $A = \mathbb{R}, x \sim y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

To jest relacja równoważności – rzeczywiście jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Widać, że dwie liczby rzeczywiste są w tej relacji, jeśli mają taką samą część ułamkową, a jeśli mają różną – to nie są. Zatem klas abstrakcji jest tyle do różnych części ułamkowych – i każda jest nieskończona, bo przecież jest nieskończenie wiele liczb o danej części ułamkowej.

b) $A = \mathbb{Z}, x \sim y \leftrightarrow x = -y$.

To nie jest relacja równoważności, bo nie jest zwrotna, np. 1 nie jest w relacji z 1, bo $1 \neq -1$.

c) $Z = \mathbb{Z}^2, \langle a, b \rangle \sim \langle x, y \rangle \Leftrightarrow a + b = x + y$.

To jest relacja równoważności – rzeczywiście jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Dwie pary liczb w niej są, jeśli mają tę samą sumę, a zatem każdej klasie abstrakcji odpowiada pewna stała suma, będąca dowolną liczbą całkowitą. Zatem klas abstrakcji jest nieskończenie wiele. Każda klasa abstrakcji jest też nieskończona, bo jest nieskończenie wiele par liczb całkowitych sumujących się do danej liczby.

3. Wypisz 3 i 4.

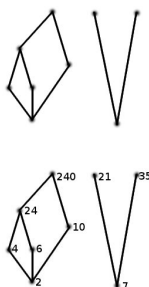
$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$

$$4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

4. Wypisz liczbę -2 .

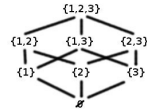
$$-2 = \langle 0, 2 \rangle = \{\{0\}, \{0, 2\}\} = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

5. Znajdź takie liczby naturalne, dla których poniższy rysunek jest diagramem Hassego dla porządku podzielności.



6. Narysuj diagram Hassego i wskaż elementy minimalne i maksymalne oraz największy i najmniejszy (jeśli istnieją), a także zbiory ograniczeń górnych i dolnych oraz kres górny i dolny zbioru Y (jeśli istnieją) w następujących częściowych porządkach $\leq$ na zbiorze X :

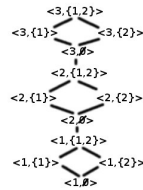
a) $X = P(\{1, 2, 3\})$, $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $Y = P(\{2, 3\})$.



Zatem elementem minimalnym (jedynym) oraz najmniejszym jest $\emptyset$, jedynym maksymalnym i największym: $\{1, 2, 3\}$.

Zbiorem ograniczeń dolnych zbioru Y jest: $\{\emptyset\}$, zaś ograniczeń górnych: $\{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ Kres górny Y to wobec tego $\{2, 3\}$, zaś kresem dolnym jest $\emptyset$.

- b) $X = \{1, 2, 3\} \times P(\{1, 2\})$ z porządkiem leksykograficznym, gdzie na $\{1, 2, 3\}$ rozpatrujemy $\leq$, a na $P(\{1, 2\})$ zawieranie. Niech $Y = \{1, 2, 3\} \times \{\{1\}\} \cup \{\langle 3, \{2\}\rangle\}$.



Zatem elementem minimalnym (jedynym) oraz najmniejszym jest $\langle 1, \emptyset \rangle$, jedynym maksymalnym i największym: $\langle 3, \{1, 2, 3\} \rangle$.

Zbiorem ograniczeń dolnych zbioru Y jest: $\{\langle 1, \emptyset \rangle, \langle 1, \{1\} \rangle\}$, zaś ograniczeń górnych: $\{\langle 3, \{1, 2, 3\} \rangle\}$ Kres górny Y to wobec tego $\langle 3, \{1, 2, 3\} \rangle$, zaś kresem dolnym jest $\langle 1, \{1\} \rangle$.