

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej,
2020/2021

spotkanie 2. Wprowadzenie do kombinatoryki

29 października 2020

1. Ile wynosi:
 - a) $5!$,
 - b) $7!$.
2. Ile wynosi:
 - a) $\binom{8}{3}$,
 - b) $\binom{2019}{0}$,
 - c) $\binom{2019}{1}$,
 - d) $\binom{9}{5}$,
 - e) $\binom{2019}{2019}$.
3. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Ile różnych pięcio-literowych słów (też bez sensu) można utworzyć z liter wyrażenia AGRESYWNA MAŁPA,
 - a) jeśli każdej litery możemy użyć wielokrotnie?
 - b) jeśli każde stworzone słowo musi się składać z różnych liter?
4. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Z każdego słowa, o którym mowa w poprzednim zadaniu w podpunkcie a) tworzymy statystykę o tym ile i jakich liter w nim występuje.
 - a) Ile różnych statystyk możemy dostać?
 - b) A ile możemy dostać statystyk, jeśli każde stworzone słowo musiało się składać z różnych liter?
5. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz.
 - a) Pięć nierozróżnialnych małp siedzi na 8-miu kolejnych drzewach. Ile takich sytuacji istnieje?
 - b) a ile sytuacji zaobserwuje wytrawny biolog, który będzie potrafił rozróżnić wszystkie małpy?
6. Mamy do wysłania (w sumie) dwanaście identycznych listów, i musimy je wysłać do czterech osób. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można to zrobić przy założeniu, że każda osoba otrzyma co najmniej dwa listy?
7. Na ile sposobów można umieścić 14 kul w 3 pudełkach, ale tak, by w co najmniej jednym z nich było co najmniej 8 kul?
 - a) Załóż, że kule są nierozróżnialne (są takie same), natomiast pudełka są (np. są ponumerowane).
 - b) Załóż, że zarówno kule, jak i pudełka są nierozróżnialne.

8. Udowodnij, korzystając z algebraicznej definicji symbolu Newtona, że dla każdego $n, k, k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

9. Udowodnij, że dla każdego $k, r, k \leq r$, zachodzi

$$k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}.$$

10. Udowodnij, opowiadając historię, że dla każdego r, m, k takich, że $m \leq r, k \leq m$, mamy

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}.$$

11. Udowodnij, zastanawiając się nad kombinatorycznymi aspektami, że dla każdego n ,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

12. Oblicz

a) $\sum_{i=5}^{10} i$,

b) $\sum_{i=0}^4 (i^2 + i)$.

13. Udowodnij, nie licząc, że

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot 2^{n-1}.$$

14. Rozwiń

a) $(a+b)^3$

b) $(a+b)^4$

15. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona oblicz

a) $(3a+1)^5$

b) 11^4

16. Korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta, udowodnij, że wśród trzech liczb całkowitych zawsze są dwie, których suma jest liczbą parzystą.

17. Niech A będzie pewnym dziesięcio-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, \dots, 50\}$. Udowodnij, że istnieją dwa różne pięcio-elementowe podzbiory A o takiej samej sumie elementów.

18. Udowodnij, że nie można umieścić na trójkącie równobocznym o boku 2 pięciu punktów, takich, że dystans między dowolnymi dwoma punktami jest zawsze większy od 1. Skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.

19. Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej:

a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} 3 \mid 7^n - 1$

b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} n \geq 3 \rightarrow 2^n > 2n + 1$

20. Ciąg Fibonacciego $\langle f_n \rangle$ zdefiniowany jest następująco: $f_0 = 0, f_1 = 1$, oraz dla każdego $n > 0$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Udowodnij, że dla każdego n ,

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$