

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej,
2020/2021

spotkanie 2. Wprowadzenie do kombinatoryki – rozwiązania

29 października 2020

1. Ile wynosi:

- a) $5!$,
 $1 \cdot \dots \cdot 5 = 120$.
b) $7!$.
 $1 \cdot \dots \cdot 7 = 5040$.

2. Ile wynosi:

- a) $\binom{8}{3}$,
 $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = 56$.
b) $\binom{2019}{0}$,
1
c) $\binom{2019}{1}$,
2019
d) $\binom{9}{5}$,
 $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{4!} = 126$.
e) $\binom{2019}{2019}$.
1.

3. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Ile różnych pięcio-literowych słów (też bez sensu) można utworzyć z liter wyrażenia AGRESYWNA MAŁPA,

- a) jeśli każdej literze możemy użyć wielokrotnie?
Wariacje z powtórzeniami, $W_{11}^5 = 161051$.
b) jeśli każde stworzone słowo musi się składać z różnych liter?
Wariacje bez powtórzeń, $V_{11}^5 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440$.

4. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz. Z każdego słowa, o którym mowa w poprzednim zadaniu w podpunkcie a) tworzymy statystykę o tym ile i jakich liter w nim występuje.

- a) Ile różnych statystyk możemy dostać?
Kombinacje z powtórzeniami, $K_{11}^5 = \binom{15}{10} = 3003$.
b) A ile możemy dostać statystyk, jeśli każde stworzone słowo musiało się składać z różnych liter?
Kombinacje bez powtórzeń, $C_{11}^5 = \binom{11}{5} = 462$.

5. Określ, czy w następującym zadaniu mowa o wariacjach, czy o kombinacjach, z czy bez powtórzeń oraz oblicz.

- a) Pięć nierozróżnialnych małp siedzi na 8-miu kolejnych drzewach. Ile takich sytuacji istnieje?
Wybieramy pięć drzew z powtórzeniami, czyli kombinacje z powtórzeniami, $K_8^5 = \binom{12}{7} = 792$.

b) a ile sytuacji zaobserwuje wytrawny biolog, który będzie potrafił rozróżnić wszystkie małpy?

Tym razem to która małpa gdzie siedzi ma znaczenie, czyli kolejność wybieranych drzew ma znaczenie, zatem są to wariacje z powtórzeniami, $W_8^5 = 8^5 = 32758$.

6. Mamy do wysłania (w sumie) dwanaście identycznych listów, i musimy je wysłać do czterech osób. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można to zrobić przy założeniu, że każda osoba otrzyma co najmniej dwa listy?

W pierwszym przypadku to są po prostu kombinacje z powtórzeniami (wybieramy 12 razy osobę, kolejność nie ma znaczenia). Czyli $K_4^{12} = \binom{15}{3} = 455$.

W drugim przypadku, najpierw przydzielmy każdemu adresatowi po dwa listy (więc zostanie nam ich 4), czyli $K_4^4 = \binom{7}{3} = 35$.

7. Na ile sposobów można umieścić 14 kul w 3 pudełkach, ale tak, by w co najmniej jednym z nich było co najmniej 8 kul?

a) Załóż, że kule są nierozróżnialne (są takie same), natomiast pudełka są (np. są ponumerowane).

Zauważ, że w dokładnie jednym pudełku będzie co najmniej 8 kul. Wybieramy to pudełko i wkładamy do niego 8 kul, a następnie resztę rozdzielamy, jak nigdy nic (czyli są to już wtedy kombinacje z powtórzeniami). $3 \cdot K_3^6 = 3 \cdot 28 = 84$.

b) Załóż, że zarówno kule, jak i pudełka są nierozróżnialne.

Zauważ, że w dokładnie jednym pudełku będzie co najmniej 8 kul. Więc to pudełko jest wyróżnione. Ustalmy, że poza tymi ośmioma, włożymy do niego jeszcze k kul. Ile jest sposobów podziału pozostałych $6 - k$ kul na dwa pudełka (rozważ parzystość k)?

$$\sum_{k=0}^6 1 + \lfloor (6 - k)/2 \rfloor = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16.$$

8. Udowodnij, korzystając z algebraicznej definicji symbolu Newtona, że dla każdego $n, k, k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

9. Udowodnij, że dla każdych $k, r, k \leq r$, zachodzi

$$k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}.$$

Ze stada r małp wybieramy ekipę na polowanie w liczbie k małp, razem z przywódcą. Możemy to zrobić na dwa sposoby: najpierw wybrać k małp, a potem z tych k przywódcę, czyli $\binom{r}{k} \cdot k$, albo najpierw przywódcę z r małp, a potem resztę $k - 1$ ekipy z pozostałych $r - 1$ małp, czyli $r \binom{r-1}{k-1}$.

10. Udowodnij, opowiadając historię, że dla każdych r, m, k takich, że $m \leq r, k \leq m$, mamy

$$\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}.$$

Ze stada r małp wybieramy ekipę na polowanie w wielkości m małp, z których k będzie tworzyć nagonkę. Więc albo z r małp wybieramy całą ekipę m małp i z wybranych m małp wybieramy k małp nagonki, albo z wszystkich małp wybieramy najpierw k małp nagonki, a z pozostałych $r - k$ małp dobieramy im $m - k$ reszty ekipy.

11. Udowodnij, zastanawiając się nad kombinatorycznymi aspektami, że dla każdego n ,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tyle jest właśnie podzbiorów zbioru n -elementowego, z tym że po lewej stronie zliczmy po kolei podzbiory $0, 1, \dots, n$ -elementowe.

12. Oblicz

a) $\sum_{i=5}^{10} i$,
 $= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$.

b) $\sum_{i=0}^4 (i^2 + i)$.
 $= (0 + 0) + (1 + 1) + (4 + 2) + (9 + 3) + (16 + 4) = 40$.

13. Udowodnij, nie licząc, że

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot k = n \cdot 2^{n-1}.$$

Samiec alpha stada n małp wybiera małpy, które pójdą szukać bananów – oraz przywódcę tej ekipy. Może to zrobić na dwa równoważne sposoby: albo wybrać liczbę k i k małp z n małp oraz przywódcę na k sposobów. Albo może wybrać najpierw przywódcę (na n sposobów) oraz dla każdej z pozostałych $n - 1$ małp zdecydować czy idzie na wyprawę czy nie (2^{n-1}).

14. Rozwiń

a) $(a + b)^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

b) $(a + b)^4$
 $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

15. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona oblicz

a) $(3a + 1)^5$
 $= 243a^5 + 81 \cdot 5 \cdot a^4 + 27 \cdot 10 \cdot a^3 + 9 \cdot 10 \cdot a^2 + 3 \cdot 5a + 1 = 243a^5 + 405a^4 + 270a^3 + 90a^2 + 15a + 1$.

b) 11^4
 $(10 + 1)^4 = 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 = 14641$.

16. Korzystając z zasady szufladkowej Dirichleta, udowodnij, że wśród trzech liczb całkowitych zawsze są dwie, których suma jest liczbą parzystą.

Szufladki to parzysta i nieparzysta. Co najmniej dwie wpadają do jednej z tych dwóch szufladek i ich suma jest parzysta.

17. Niech A będzie pewnym dziesięcio-elementowym podzbiorem zbioru $\{1, \dots, 50\}$. Udowodnij, że istnieją dwa różne pięcio-elementowe podzbiory A o takiej samej sumie elementów.

Liczbę możliwych pięcioelementowych podzbiorów to $\binom{50}{5}$, co jest bardzo dużą liczbą a liczbę możliwych sum ich elementów jest nie większa niż największa możliwa taka suma, czyli $50 + 49 + 48 + 47 + 46 = 240$, więc teza wynika z zasady szufladkowej Dirichleta.

18. Udowodnij, że nie można umieścić na trójkącie równobocznym o boku 2 pięciu punktów, takich, że dystans między dowolnymi dwoma punktami jest zawsze większy od 1. Skorzystaj z zasady szufladkowej Dirichleta.

Wystarczy podzielić trójkąt na 4 mniejsze trójkąty równoboczne o boku 1. W co najmniej jednym wypadną dwa punkty w odległości nie większej niż 1.

19. Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej:

a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} 3 | 7^n - 1$

Pierwszy krok, dla $n = 0$, $3 | 1 - 1$, ok. Drugi krok: założenie: $3 | 7^k - 1$, teza $3 | 7^{k+1} - 1$. Niech $7^k - 1 = 3a$. Zauważmy, że $7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 7 + 7 - 1 = 7(7^k - 1) + 6 = 3(7a + 2)$ jest podzielne przez 3. $\square$

b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} n \geq 3 \rightarrow 2^n > 2n + 1$

Pierwszy krok, dla $n = 3$, $2^3 = 8 > 6 + 1 = 7$, ok. Drugi krok: założenie $2^k > 2k + 1$, teza $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$. Rzeczywiście korzystając z założenia: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2 > 2k + 2 + 2 > 2k + 2 + 1 = 2(k+1) + 1$. Po drodze skorzystaliśmy z tego, że $k \geq 3 > 1$. $\square$

20. Ciąg Fibonacciego $\{f_n\}$ zdefiniowany jest następująco: $f_0 = 0, f_1 = 1$, oraz dla każdego $n > 0$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Udowodnij, że dla każdego n ,

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

Dowodzimy przez indukcję. Rzeczywiście, dla $n = 0$, mamy

$$1 = f_1 = \sum_{i=0}^0 \binom{0-i}{i} = \binom{0}{0} = 1.$$

podobnie dla $n = 1$

$$2 = f_2 = \sum_{i=0}^0 \binom{1-i}{i} = \binom{1}{0} = 1.$$

Założmy, że jest to prawda dla $n = 2k$, czyli, że

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{2k-i}{i}$$

oraz dla $n = 2k - 1$, czyli

$$f_k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-i-1}{i}$$

Zatem

$$\begin{aligned} f_{2k+1} &= f_{2k-1} + f_{2k} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-i-1}{i} + \sum_{i=0}^k \binom{2k-i}{i} = \\ &= \binom{2k}{0} + \left(\binom{2k-1}{0} + \binom{2k-1}{1} \right) + \left(\binom{2k-2}{1} + \binom{2k-2}{2} \right) + \dots + \left(\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right) = \\ &= \binom{2k+1}{0} + \binom{2k}{1} + \binom{2k-1}{2} + \dots + \binom{k+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{2k+1-i}{i}, \end{aligned}$$

co dowodzi tezy w tym przypadku, bo $\lfloor (2k+1)/2 \rfloor = k$.

Założmy teraz, że jest to prawda dla $n = 2k + 1$, czyli, że

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{2k+1-i}{i}$$

oraz dla $n = 2k$, czyli

$$f_k = \sum_{i=0}^k \binom{2k-i}{i}$$

Zatem

$$\begin{aligned} f_{2k+2} &= f_{2k} + f_{2k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{2k-i}{i} + \sum_{i=0}^k \binom{2k-i+1}{i} = \\ &= \binom{2k+1}{0} + \left(\binom{2k}{0} + \binom{2k}{1} \right) + \left(\binom{2k-1}{1} + \binom{2k-1}{2} \right) + \dots + \left(\binom{k+1}{k-1} + \binom{k+1}{k} \right) + \binom{k}{k} = \\ &= \binom{2k+2}{0} + \binom{2k+1}{1} + \binom{2k}{2} + \dots + \binom{k+2}{k} + \binom{k+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{2k+2-i}{i}, \end{aligned}$$

co dowodzi tezy w tym przypadku, bo $\lfloor (2k+2)/2 \rfloor = k+1$.