

Seminarium z teorii zbiorów i kombinatoryki nieskończonej, 2020/2021

spotkanie 1. Język matematyki i zbiory – rozwiązania

22 października 2020

1. Czy to są tautologie?

a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,

Tak.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

b) $p \rightarrow (\neg p \vee q)$,

Nie, dla $p = 1$ i $q = 0$ dostajemy sprzeczność.

c) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg q \wedge p)$,

Tak.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \wedge p$	$\neg(\neg q \wedge p)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg q \wedge p)$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

2. Udowodnij, że:

a) kwadrat liczby naturalnej podzielnej przez 3 dzieli się przez 9, korzystając z metody wprost,

Niech n będzie taką liczbą podzielną przez 3, czyli $n = 3k$ dla pewnej liczby naturalnej k . W takim razie $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$ dzieli się przez 9.

b) jeśli x jest liczbą wymierną, to $x^2 \neq 5$, korzystając z metody nie wprost.

Założmy przeciwnie, że x jest liczbą wymierną, czyli $x = p/q$, $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ oraz $x^2 = 5$. Założmy ponadto bez straty ogólności, że p/q jest ułamkiem skróconym, czyli, że p i q nie mają wspólnych dzielników > 1 . W takim razie $(p/q)^2 = 5$, zatem $p^2/q^2 = 5$, czyli $p^2 = 5q^2$. W takim razie p^2 dzieli się przez 5. W takim razie w rozkładzie liczby p^2 na czynniki pierwsze występuje liczba 5, ale skoro jest to kwadrat pewnej liczby całkowitej, to 5 występuje w tym rozkładzie w pewnej parzystej > 0 potęgę. Zatem $5|p$, a więc 5 nie dzieli q , zatem nie dzieli q^2 , co daje sprzeczność.

3. Wskaż wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

elementy: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

podzbiory: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

4. Rozstrzygnij, czy prawdziwe są następujące zdania:

a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1$

Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna m , taka że n jest o 1 większa od m . Nieprawda, dla $n = 0$ nie istnieje taka liczba.

b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} m = n + 1$

Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna o jeden od niej większa. Prawda.

c) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (\exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1 \leftrightarrow n > 0)$

Dla każdej liczby naturalnej n , jeśli istnieje liczba naturalna m , taka że n jest o jeden większa od m , to n jest większa od zera. Prawda, $n = m + 1 \geq 0 + 1 = 1$, więc $n > 0$.

d) $(\forall_{n \in \mathbb{N}} (\exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1) \rightarrow 1 < 0)$

Jeśli dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna m , taka że n jest o 1 większa od m , to 1 jest mniejsze od zera. Prawda. Wiemy, że poprzednik tej implikacji jest fałszywy, więc implikacja jest prawdziwa niezależnie od absurdalności następnika. Z fałszu wynika wszystko.

e) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (6|n \leftrightarrow 2|n \wedge 3|n)$

Dla każdej liczby naturalnej, jest ona podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy gdy jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3. Prawda.

f) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (6|n \rightarrow 2|n \vee 3|n)$

Dla każdej liczby naturalnej, jeśli jest ona podzielna przez 6, to jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 3. Prawda. Nawet przez 2 i przez 3.

g) $\exists_X \neg \exists_y y \in X$

Istnieje zbiór X , taki że nie istnieje element y , który do niego należy. Prawda – X to zbiór pusty, $X = \emptyset$. A całe zdanie to tak zwany aksjomat zbioru pustego.

h) $\{z \in \mathbb{Z}: z \geq 0\} = \mathbb{N}$

Zbiór liczb całkowitych większych równych zero to zbiór liczb naturalnych. Prawda.

i) $\exists_x x \in \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0\}$

Istnieje liczba x należąca do zbioru wszystkich liczb rzeczywistych spełniających równanie $x^2 + 1 = 0$. Nieprawda, taki zbiór jest pusty, bo żadna liczba rzeczywista nie spełnia tego równania.

j) $\forall_X \emptyset \subseteq X$

Dla każdego zbioru, zbiór pusty jest jego podzbiorem. Prawda.

k) $\forall_A (A \subseteq \mathbb{R} \wedge \exists_{n \in \mathbb{N}} n \in A) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$

Dla każdego zbioru A , jeśli A jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych oraz istnieje liczba naturalna należąca do zbioru A , to A jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Nieprawda, kontrprzykład $A = [0, 1]$, istnieje liczba naturalna w tym zbiorze, np. 0. Ale $A \neq \mathbb{N}$.

5. Wskaż wszystkie elementy i podzbiory zbioru $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Obliczamy, że $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$ oraz $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$. Zatem:

elementy: $\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}$,

podzbiory: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$.

6. Udowodnij lub wykaż, że to nieprawda, że dla dowolnych zbiorów A, B, C :

a) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$

Rozwiążemy to metodą rodziny niezależnej. Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. To jest rodzina niezależna. Lewa strona to $A \cup B = \{1, 2, 3\}$. Obliczamy prawą: $A \Delta B = \{1, 3\}$, $A \cap B = \{2\}$, a zatem $A \Delta B \Delta (A \cap B) = \{1, 2, 3\}$. Zgadza się. $\square$

b) $(A \setminus B) \cup B = A$?

Nie. Na przykład $A = \emptyset, B = \{0\}$. Wtedy $A \setminus B = \emptyset$, $(A \setminus B) \cup B = \{0\} \neq \emptyset = A$.

c) jeśli $A \Delta B = C$, to $B = A \Delta C$

Założmy, że $A \Delta B = C$. Weźmy $x \in B$. Zauważmy, że $x \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy a. $x \in B \cap A$ lub b. $x \in B \setminus A$. W pierwszym przypadku wnioskujemy, że $x \in A \Delta B = C$ oraz $x \in A$, zatem $x \in A \Delta C$. Zaś w drugim, że $x \notin A \Delta B = C$, ale $x \in A$, zatem $x \in A \Delta C$ – w każdym przypadku. Zatem $B \subseteq A \Delta C$. Jeśli zaś $x \in A \Delta C$, to znów mamy dwa przypadki. Albo $x \in A \setminus C = A \setminus (A \Delta B)$, czyli $x \in B$, albo $x \in C \setminus A = (A \Delta B) \setminus A$ i wtedy też $x \in B$, zatem $A \Delta C \subseteq B$. $\square$

d) $(B \Delta C) \cap A \subseteq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy $B \cap C \cap A \supseteq C \cap A$

Jest prawdą. Oto dowód:

$\Leftarrow$: Założmy, że $(B \Delta C) \cap A \subseteq B$ oraz $x \in C \cap A$. Założmy nie wprost, że $x \notin B$. Zatem $x \in A$ oraz $x \in C \setminus B$, zatem $x \in B \Delta C$ oraz $x \in A$, zatem $x \in (B \Delta C) \cap A$, zatem z założenia $x \in B$ – sprzeczność.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że $C \cap A \subseteq A \cap B \cap C$ oraz niech $x \in (B \Delta C) \cap A$. Zatem $x \in B \Delta C \wedge x \in A \rightarrow (x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B) \wedge x \in A \rightarrow ((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin B)) \wedge x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in (A \cap C) \setminus B)$. Ale z założenia $C \cap A \subseteq A \cap B \cap C$, więc $(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in (A \cap C) \setminus B) = \emptyset$, co eliminuje drugą opcję, więc $x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$, w szczególności $x \in B$. $\square$

e) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Zastosujemy metodę przez dowiedzenie zawierania w obie strony:

$A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)$: Załóżmy, że $x \in A \cap (B \Delta C)$. Zatem $x \in A$ oraz $x \in B$ lub $x \in C$, ale nie w obu równocześnie. A zatem mamy dwa przypadki: $x \in A \cap B$ lub $x \in A \cap C$, ale wiemy, że nie mogą zachodzić równocześnie. A zatem $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

$(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C)$: Niech $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ zatem na pewno $x \in A$ oraz $x \in B$ lub $x \in C$, ale nie jest tak, że $x \in A \cap B \cap C$. A zatem $x \in A$ oraz $x \in B \cup C$, ale nie $x \in B \cap C$, czyli $x \in A \cap (B \Delta C)$. $\square$

7. Znajdź sumę i przecięcie dla każdej z następującej rodzin zbiorów:

a) $\mathcal{A} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\bigcup \mathcal{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \bigcap \mathcal{A} = \{\emptyset\}.$

b) $\mathcal{B} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{\frac{n+1}{2} : n \in \mathbb{N}\}\}$

$\bigcup \mathcal{B} = \{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}, \bigcap \mathcal{B} = \emptyset.$