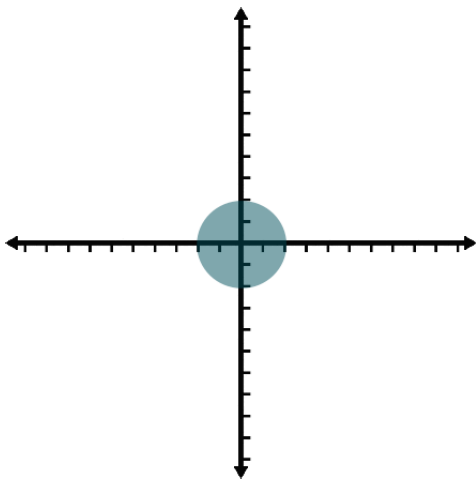


Algebra dla MSEM 1, 2019/2020
ćwiczenia 9. – rozwiązania

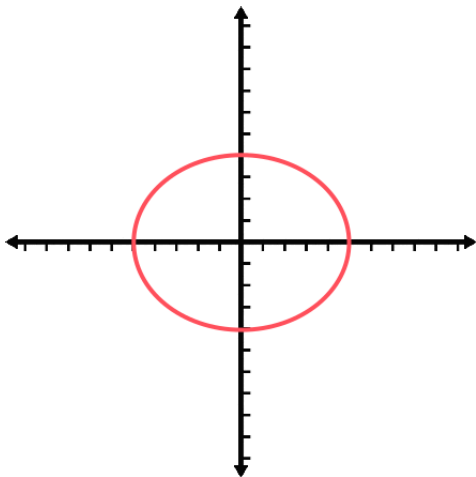
5 listopada 2019

1. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniające warunki:

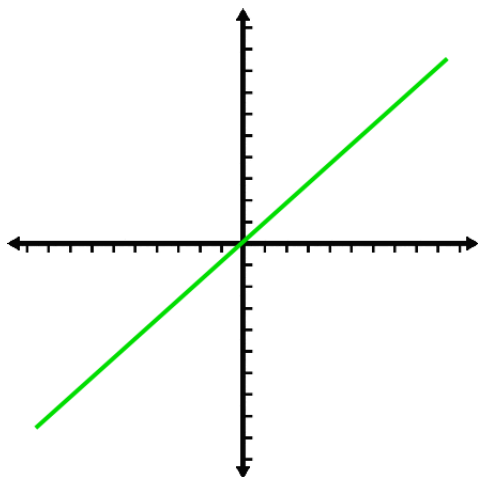
$$|z| \leq 2$$



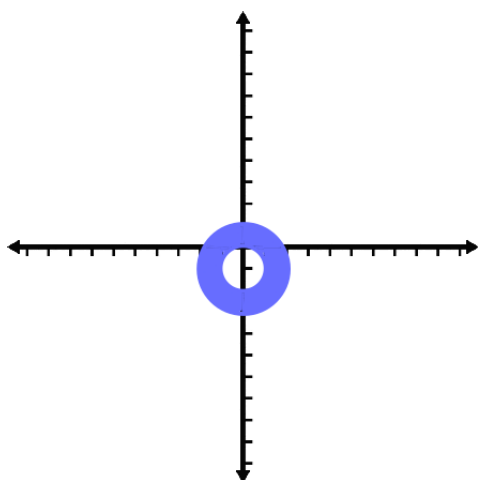
$$|z - 3| + |z + 3| = 10$$



$$\Re z = \Im z$$



$$1 \leq |z + i| \leq 2$$



2. Wykonaj działania:

$$\begin{aligned} & \frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2} - \frac{(1-2i)^3}{(1+i)^3} \\ & \frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2} - \frac{(1-2i)^3}{(1+i)^3} = \frac{8+6i}{-3+4i} - \frac{(-3-4i)(1-2i)}{(2i)(1+i)} = \frac{8+6i}{-3+4i} - \frac{-11+2i}{-2+2i} = \\ & = \frac{-24+24+i(-18-32)}{9+16} - \frac{22+4+i(-4+22)}{4+4} = 2i - \frac{13+9i}{4} = \frac{-13-i}{4}. \end{aligned}$$

$$\frac{i^3(1-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}-i)^8}$$

Wyliczamy moduły i argumenty:

x	$ x $	$Arg x$
i	1	$\frac{\pi}{2}$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$\frac{-\pi}{4}$
$1+i\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}$
$\sqrt{3}-i$	2	$\frac{-\pi}{6}$
i^3	1	$\frac{-\pi}{2}$
$(1-i)^{10}$	2^5	$\frac{-\pi}{2}$
$(1+i\sqrt{3})^7$	2^7	$\frac{\pi}{3}$
$(\sqrt{3}-i)^8$	2^8	$\frac{2\pi}{3}$
L	2^5	$-\pi$
M	2^{15}	π
wynik	2^{-10}	0

A zatem wynik to po prostu $2^{-10}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{1}{1024}$.

3. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyraż $\cos 3\alpha$ przy pomocy $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

$\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha$, a zatem $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$.

4. Oblicz pierwiastki:

$$\sqrt[4]{-1}$$

Argument to π , a zatem mamy pierwiastki (pierwiastki są czwartego stopnia, więc ich argumenty różnią się o $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{-i}$$

Argument to $\frac{-\pi}{2}$, a zatem mamy pierwiastki:

$$\begin{aligned}\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{+1 + i\sqrt{3}}$$

Argument to $\frac{\pi}{3}$, a zatem główny pierwiastek to:

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}.$$

5. Rozwiąż równanie $z^2 + (3i + 1)z + (2i - 2) = 0$.

$\Delta = (3i + 1)^2 - 4(2i - 2) = -9 + 1 + 6i - 8i + 8 = -2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$, a zatem mamy dwa $\sqrt{\Delta}$ równe:

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i$$

oraz

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i.$$

A zatem szukane pierwiastki to:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-1 - 3i - 1 + i}{2} = -1 - i \\ z_1 &= \frac{-1 - 3i + 1 - i}{2} = -2i.\end{aligned}$$

6. Zapisać liczby w postaci wykładniczej.

$$1 - i$$

$$1 - i = e^{\ln \sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{1 + i}$$

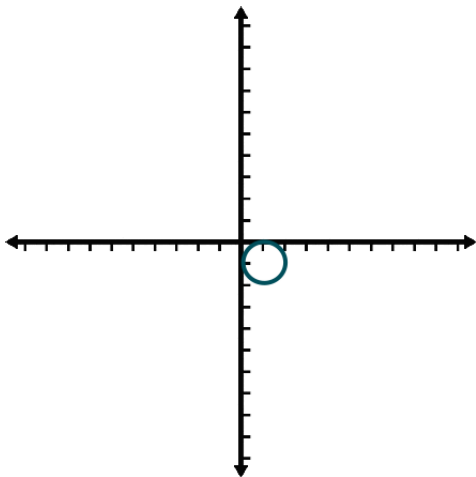
$$\frac{1}{1 + i} = \frac{1}{e^{\ln \sqrt{2} + \frac{i\pi}{4}}} = e^{-\ln \sqrt{2} - \frac{i\pi}{4}}.$$

7. Oblicz używając postaci wykładniczej:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5 (1 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^5}$$

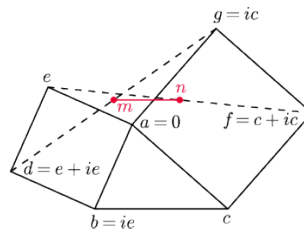
$$\frac{(\sqrt{3} + i)^5 (1 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + i\sqrt{3})^5} = \frac{e^{5 \ln 2 + \frac{5i\pi}{6}} e^{4 \ln 2 - \frac{4i\pi}{3}}}{e^{7 \ln 2 - \frac{7i\pi}{6}} e^{5 \ln 2 + \frac{5i\pi}{3}}} = e^{-3 \ln 2 - i\pi} = \frac{1}{8}(-1 + 0i) = -\frac{1}{8}.$$

8. Znajdź zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej, taki że $z = 1 - i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$.



9. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$. Wskazówka: rozważ to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$.

Zadanie pochodzi z LII OM, rysunek z artykułu z „Deltę” autorstwa J. Jaszuńskiej.



Rozważmy to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ oraz $C = c$. Wtedy $G = ic$ oraz $F = c + ic$. Niech $E = e$, wtedy $B = ie$ oraz $D = ie + e$. W końcu: $m = ((e + ie) + ic)/2$ oraz $n = (e + (c + ic))/2$. Mamy:

$$\vec{MN} = n - m = \frac{e + c + ic - e - ie - ic}{2} = \frac{c - ie}{2} = \frac{\vec{BC}}{2}.$$

Zatem $MN : BC = 1 : 2$.