

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 8.

29 października 2019

1. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 100\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Znajdź $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.
2. Udowodnij, że $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
3. Niech $A = [-1; 1]$, zaś $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Znajdź obraz i przeciwobraz zbioru A , gdy
 - a) $f(x) = x^4 + 7$,
 - b) $f(x) = \sin x\pi \cdot \cos x\pi$,
 - c) $f(x) = 3^x$.
4. Niech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ będą funkcjami. Wykaż, że jeśli $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową, to f też jest funkcją różnowartościową.
5. Ile jest funkcji ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ na zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, takich, że $f(1) = 1$?
6. Wykaż, że zbiór $G = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$ jest grupą przekształceń.
7. Niech $A_n = [-1/n; 1/n)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, oraz $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$ oraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_n$.
8. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru T oraz A oraz dla dowolnej rodziny indeksowanej A_t , $t \in T$, zachodzi
$$A \setminus \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} (A \setminus A_t).$$
9. Ustalmy $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|(y - x)$. Wykazać, że $\equiv_n$ jest relacją równoważności oraz opisać jej klasy abstrakcji.
10. Zbadać elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze w porządku liczb naturalnych (bez zera) z podzielnością.
11. Rozstrzygnij, czy zbiór wszystkich okręgów na płaszczyźnie o środkach mających współrzędne wymierne i promieniach $n\sqrt{5}$, $n \in \mathbb{N}$ jest przeliczalny.
12. Udowodnij, że jeśli $|A| = |B|$ oraz $|X| = |Y|$, to $|A \times X| = |B \times Y|$.